На правах рукописи

САФУАНОВ Ильдар Суфиянович

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ВЫСШЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Специальность 13.00.02 – теория и методика обучения математике

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора педагогических наук

Москва 2000

Работа выполнена на кафедре математики и методики ее преподавания математического факультета Набережночелнинского государственного педагогического института.

Официальные оппоненты:
Член-корреспондент РАО,
доктор физико-математических наук,
профессор Баврин И. И.,

заслуженный деятель науки РФ,
доктор педагогических наук,
профессор Мордкович А. Г.,

доктор педагогических наук,
профессор Михеев В. И.

Ведущая организация: Новосибирский государственный университет.

..........января..........2000 г.
Совета Д 053.01.11 в Москов-
ерситете по адресу:
л., д. 1, ауд. 209.

библиотеке МПГУ по адресу:
л., д. 1.

...января.........2000 года.

ЛУДИНА Г. Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время, когда, с одной стороны, имеет место информационный бум, вызванный бурным развитием науки и техники, а с другой, происходят глубокие общественные и экономические преобразования в нашей стране, перед математическим образованием стоят важные и сложные задачи.

В частности, перестройка школы на принципах гуманизации и демократизации в соответствии с принятым в 1992 году Законом Российской федерации об Образовании, а также начавшийся процесс дифференциации школ предъявляют новые требования к качеству подготовки учителей математики. Необходимость работать в условиях вариативности программ и учебников, профильной и уровневой дифференциации требуют от учителей как более глубоких математических знаний, так и лучшей методической подготовки.

Между тем состояние математической подготовки учителей математики, выпускников математических специальностей педагогических вузов не соответствуют возросшим требованиям. Как отмечали многие авторы (А. Г. Мордкович, Г. Л. Луканкин, Г. Г. Хамов, В. А. Тестов, Л. В. Шкерина), в деле математической подготовки выпускников педвузов имеются существенные проблемы. Наблюдаются серьезные пробелы в знании теоретического материала, формализм в знаниях, неумение применять теоретические знания на практике, слабая сформированность методических умений, недостаток общей и математической культуры; оторванность психолого-педагогических и методических знаний от математического содержания.

Требуют разрешения существенные противоречия в организации обучения математическим дисциплинам в педагогических вузах:

– между крупными теоретическими достижениями в методике и психологии преподавания математики в школе и слабым использованием, отсутствием показа этих достижений в преподавании математических дисциплин будущим учителям математики;

– между современными требованиями приоритета свободного развития личности в процессе обучения и преобладанием догматического и объяснительно-репродуктивного преподавания;

– между большой сложностью и глубиной содержания математических курсов в программах подготовки будущих учителей и малой разработанностью методических приемов для эффективного преподавания этих курсов;

– между высокими требованиями к математической подготовке преподавательских кадров по математическим дисциплинам для высшей школы и неразработанностью требований к их методической подготовке;

– между богатством и эффективностью накопленных человечеством методов математического познания и слабым использованием этих методов для организации процесса познания студентами математической науки.

Проблемы математической подготовки будущих (и работающих) учителей математики всегда интересовали математиков и деятелей в области математического образования. Этому, в частности, уделяли внимание такие крупные зарубежные математики и педагоги, как Ф. Клейн, Р. Курант, Д. Пойа, Х. Фройденталь. Большое значение математической культуре учителей придавали выдающиеся российские и советские математики-педагоги Н. И. Лобачевский, М. В. Остроградский, Б. К. Млодзеевский, И. И. Жегалкин, Н. Н. Лузин, А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, И. В. Арнольд, А. Я. Хинчин, П. С. Новиков, А. И. Мальцев, Б. В. Гнеденко, Н. Я. Виленкин, которые читали будущим и работающим учителям лекции, писали для них учебники и научно-популярные книги.

Систематическое исследование проблем математической подготовки будущих учителей предпринял М. В. Потоцкий[1]. Л. Д. Кудрявцев[2] говорит о методических принципах преподавания математики в высшей школе, приходя, правда, к выводу «о невозможности формулирования здесь точных принципов, которыми следует руководствоваться» (с. 141). По мнению Л. Д. Кудрявцева, установление таких принципов, пожалуй, наиболее трудная задача при обучении: «Трудности при обучении любому предмету возникают уже при отборе материала, которому собираются учить и, быть может, еще больше при установлении принципов, которыми следует руководствоваться при обучении» (с. 11).

Таким образом, Л. Д. Кудрявцев наметил задачу разработки методических принципов преподавания математических дисциплин в вузах.

Как известно, методика преподавания математики находится «в определенном смысле… на стыке философии, математики, логики, психологии, биологии, кибернетики и, кроме того, искусства»[3]. Поэтому наиболее плодотворными являются комплексные исследования теоретических основ методики преподавания математики, использующие современные достижения ряда научных дисциплин и направлений человеческой деятельности. Это в полной мере относится и к вузовской методике. В частности, комплексное применение знаний в области психолого-педагогических, логико-методологических, общественных и математических наук позволяет вести эффективные исследования в области математической подготовки будущих учителей в педагогических вузах.

---

[1] Потоцкий, М. В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте. М.: Просвещение, 1975.

[2] Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание. М.: Наука,.1985.

[3] Колягин, Ю. М., Оганесян, В. А., Саннинский, В. Я., Луканкин, Г. Л. (1975). *Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика.* М.: Просвещение.

В последние годы появился целый ряд трудов, посвященных тем или иным аспектам этой тематики. В частности, вопросам улучшения вузовской математической подготовки будущих учителей математики посвящены труды А. Г. Мордковича, Г. Л. Луканкина, Г. Г. Хамова, В. А. Кузнецовой, О. А. Иванова, А. В. Ястребова, Е. И. Смирнова, А. Г. Солониной, В. А. Тестова и др. Ими обоснованы такие направления в улучшении математической подготовки будущих учителей, как интегративность (совмещение в математических курсах содержательно-научной и методической линии), многоуровневость, моделирование научных исследований, наглядно-модельная технология, персонализация обучения.

А. Г. Мордкович и Г. Г. Хамов разрабатывали методические системы преподавания тех или иных математических дисциплин в педагогических вузах, охватывающие цели, содержание, формы, методы и средства обучения. А. Г. Мордкович[4] первым обратил внимание на важную проблему: "Не исследованы возможности формирования методических взглядов будущего учителя в процессе преподавания математических дисциплин... При обучении а) математике, б) будущего учителя математики – проблема *что преподавать*, пожалуй, даже уступает по значимости проблеме *как преподавать*". Он же впервые рассмотрел проблемы математической подготовки будущих учителей с точки зрения профессионально-педагогической направленности, разработав соответствующие принципы.

Серьезное внимание математическому образованию учителей уделяется и в зарубежных исследованиях. Начиная с 1998 года выходит специализированный международный журнал "Journal of Mathematics Teacher Education", в котором рассматриваются и вопросы математической подготовки будущих учителей. Этой проблеме посвящены проведенные в последние десятилетия исследования А. Виттенберга, Э. Х. Виттманна, Ф. Дэйвиса и других. Все они, как и отечественные ученые, отмечали необходимость создания интегративных математических курсов, в которые вплетались бы и методические элементы, а также отдельные темы и примеры из элементарной и школьной математики.

В проводимых до сих пор отечественных и зарубежных исследованиях математического образования будущих учителей главное внимание обращалось на профессионально-педагогическую направленность в аспекте интеграции методической и элементарно-математической подготовки в специальную математическую. При этом обучение собственно математическим понятиям порой предлагалось осуществлять по моделям, основанным на психологических теориях обучения, разработанных главным образом для основной и даже для начальной школы.

---

[4] Мордкович, А. Г. О профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей // *Математика в школе*, 1984, № 6, с. 42-45.

Правда, в 90-е годы некоторые западные ученые начали систематически изучать «продвинутое» математическое мышление, т. е. мышление, имеющее дело со сложными и абстрактными понятиями вузовской математики[5]. Однако, их исследования носили несколько односторонний характер, следуя главным образом идеям Ж. Пиаже и не учитывая положений деятельностного подхода Л. С. Выготского, А. Н. Леонтьева и таких достижений советской теории развивающего обучения, как концепция учебной деятельности В. В. Давыдова, системы Л. В. Занкова, П. Я. Гальперина и их учеников.

Как в отечественной, так и в зарубежной литературе недостаточно представлены исследования, посвященные проблемам реализации методических принципов преподавания математических дисциплин в высшей педагогической школе в виде системы методических приемов, научно обоснованных методических рекомендаций по построению вузовских математических курсов, по проектированию и осуществлению системы изучения сложных и абстрактных математических понятий. Мало разработаны вопросы, касающиеся средств выразительности, педагогического и эстетического воздействия на студентов в процессе преподавания математических дисциплин. А изучение этих проблем приобретает особенную важность сегодня, в связи с тенденцией к гуманитаризации и гуманизации математического образования, в том числе, разумеется, и образования будущих учителей математики.

Еще в 60-е годы М. В. Потоцкий отмечал, что обучение понятиям вузовской математики требует иных подходов, нежели обучение понятиям школьной математики[6]. Он же писал, что «истинное и полное понимание абстрактных математических идей может быть достигнуто лишь на основе знания их происхождения…»[7].

Таким образом, речь идет о целесообразности *генетического подхода* (т. е. следования естественным путям происхождения и применения математического знания) к обучению сложным вузовским математическим курсам.

Однако, хотя генетический подход использовался в ряде методических трудов, теоретически он мало разработан даже для обучения школьной математике.

Анализ работ в области теории познания, психологии, дидактики и методики показывает, что к настоящему времени сложились теоретические предпосылки для научно-методической разработки генетического подхода как основы построения и реализации системы обучения математическим дисциплинам в высшей педагогической школе.

---

[5] Tall, D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[6] Потоцкий, М. В. *О педагогических основах обучения математике*. М.: Учпедгиз, 1963, с. 92

[7] Потоцкий, М. В. *Преподавание высшей математики в педагогическом институте*. М.: Просвещение, 1975, с. 15.

Все вышеизложенное определяет ***актуальность*** нашего исследования.

Объектом исследования является процесс обучения математическим дисциплинам в педагогических вузах.

Предметом исследования являются методические принципы построения и реализации системы обучения педвузовским математическим дисциплинам с опорой на естественные пути происхождения и применения математического знания.

Научная проблема исследования состоит в теоретической разработке основанной на генетическом подходе концепции обучения математическим дисциплинам в высшей педагогической школе.

Целью исследования является анализ теоретических и практических аспектов математической подготовки учителей, в частности, современных тенденций в зарубежном математическом образовании и подготовке учителей математики, теоретическая разработка, с учетом достижений отечественных и зарубежных методико-математических, психолого-педагогических и логико-философских исследований, концепции генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педвузах и построение, на основе принципиальных положений предлагаемой концепции, приемов эффективного обучения этим дисциплинам, а также приложение этих принципов и приемов к различным формам обучения математике.

Гипотеза исследования заключается в том, что существует принципиальная возможность эффективного построения учебного процесса по математическим дисциплинам в высшей педагогической школе, если:

1) в основе построения системы обучения математическим курсам лежит генетический подход;

2) разработана теоретическая концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе;

3) концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам опирается как на все ценное из достижений отечественных и зарубежных методико-математических, психолого-педагогических и логико-философских исследований, так и на классический опыт и наблюдения за учебным процессом в высшей педагогической школе, строится с учетом современных тенденций в отечественном и зарубежном математическом образовании и подготовке учителей математики;

4) обучение ведется с опорой на естественные пути построения математического знания, достигающейся учетом происхождения и исторического пути становления математических теорий;

5) на основе логико-эпистемологического анализа учебного материала и выявления логической генеалогии понятий и утверждений, их роли в организации математических идей и конструкций осуществляются по-

строение логической структуры взаимосвязей математической теории и создание проблемных ситуаций для обучения;

6) психологической основой обучения математике служит деятельностный подход, на основе которого разрабатываются система действий по овладению понятиями, пути развития мотивации учения;

7) при обучении выполняются требования предвосхищения, основательности, повторения на разных уровнях, совмещения функций и экономии, варьирования, контраста, воздействия на различные каналы восприятия материала студентами;

8) устанавливаются связи изучаемого материала с естественнонаучными, техническими задачами, с элементами культуры, истории, общественной жизни, выявляются пути приложения математической теории внутри и вне математики.

Логика исследования определила необходимость решения ряда задач.

Задачи исследования подразделяются на четыре группы:

I. Задачи, связанные с уточнением проблемы исследования и выявлением предпосылок для ее решения:

1) Рассмотреть современное состояние обучения математическим дисциплинам будущих учителей математики.

2) Выявить основные тенденции в математическом образовании и подготовке учителей за рубежом

3) Уточнить проблему теоретической разработки генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе.

4) Выявить психолого-педагогические предпосылки теоретической разработки генетического подхода к обучению математике.

II. Задачи, связанные с теоретической разработкой концепции генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педагогических вузах:

1) Разработать теоретические основы построения системы обучения вузовским математических дисциплинам с опорой на естественные пути построения математического знания, достигающейся учетом происхождения и исторического пути становления математических теорий.

2) Исследовать пути логико-эпистемологического анализа и логической организации учебного материала, создания проблемных ситуаций при генетическом подходе к обучению математике.

3) Исследовать психологические аспекты генетического подхода к обучению математическим дисциплинам.

4) Разработать принцип концентрированного обучения математическим дисциплинам, т. е. обучения, удовлетворяющего требованиям

предвосхищения, основательности, повторения на разных уровнях, совмещения функций и экономии, варьирования, контраста, воздействия на различные каналы восприятия материала студентами

III. Задачи, связанные с реализацией генетического подхода в разработке и осуществлении системы обучения математической дисциплине:

1) Построить систему изучения важнейших понятий курса алгебры.

2) Разработать последовательность и методику обучения математической дисциплине на примере педвузовского курса алгебры.

IV. Задачи, связанные с осуществлением генетического подхода в различных формах организации обучения:

1) Исследовать особенности генетического подхода в организации практических занятий и упражнений, самостоятельной работы студентов, их научно-исследовательской и учебно-исследовательской работы, в том числе с использованием современных информационных технологий.

2) Разработать программы и методику преподавания новых интегративных спецкурсов.

***Методологическая основа исследования*:** основные положения теории познания и логики науки. Психолого-педагогическая основа – концепция развивающего обучения, деятельностный подход к исследованию и осуществлению обучения. Методико-математическая основа – концепции профессионально-педагогической направленности, гуманизации и гуманитаризации обучения математике в педагогических вузах.

***Методы исследования*:** анализ литературы по философии, психологии и педагогике, математике и методике ее преподавания, а также вузовских учебных программ, учебников и учебных пособий; анкетирование и интервьюирование студентов, преподавателей вузов, учащихся школ; массовые проверки и анализ математической подготовки студентов вузов; анализ современных тенденций развития отечественного и зарубежного математического образования и подготовки учителей математики; изучение вузовской практики и обобщение педагогического опыта; анализ собственного опыта работы в педагогическом вузе и других учебных заведениях; опытная проверка отдельных положений.

***Теоретические источники*:** литература по теоретическим проблемам математического образования (А. Пуанкаре, Ф. Клейн, Л. Д. Кудрявцев, Б. В. Гнеденко, С. П. Новиков, А. Я. Хинчин); литература, посвященная проблемам преподавания вузовской математики, в частности, профессионально-педагогической направленности преподавания математических дисциплин в педвузах (А. Г. Мордкович, М. В. Потоцкий, Г. Г. Хамов, Г. Л. Луканкин, О. А. Иванов, А. В. Ястребов, Е. И. Смирнов, В. А. Тестов, Э. Дубинский и др.); литература по дифференциации обучения математике (В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев, Ю. М. Колягин, И. М. Смирнова, В. В. Фирсов); по психологическому анализу деятельности, системогенезу профессиональной деятельности (Л. С. Выготский, А. Н. Леонтьев, П. Я. Гальперин, В. Д. Шадриков), по психолого-педагогическим основам развивающего обучения (Ф. А. В. Дистервег, Л. С. Выготский, Ж. Пиаже, Л. В. Занков, А. Н. Леонтьев, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, Н. Ф. Талызина, М. А. Холодная); по теории личностно-ориентированного обучения (В. В. Сериков, Н. Л. Стефанова, А. Г. Солонина); по организации многоуровневой подготовки специалистов (В. А. Кузнецова); по вопросам проблемного обучения (М. И. Махмутов, А. М. Матюшкин, М. А. Чошанов); по общей теории обучения в высшей школе (С. И. Архангельский, А. А. Космодемьянский, А. П. Минаков, В. И. Михеев); по методико-математическим проблемам (Н. М. Извольский, Н. М. Бескин, В. М. Брадис, Д. Пойа, Х. Фройденталь, Г. Бруссо, В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, В. М. Тихомиров, Р. С. Черкасов, Л. М. Фридман, М. И. Башмаков, Г. В. Дорофеев, Г. Д. Глейзер, Ю. М. Колягин, В. С. Леднев, Г. Л. Луканкин, И. И. Мельников, А. М. Пышкало, Г. И. Саранцев, В. А. Далингер, М. К. Потапов, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, И. Д. Пехлецкий, Н. Л. Стефанова, Т. А. Иванова, Т. С. Полякова, Л. В. Шкерина); учебники и задачники для высшей школы, изданные записи лекций классиков математики и математического образования (Б. К. Млодзеевский, А. А. Марков (старший), П. Л. Чебышев, И. И. Жегалкин, Н. Н. Лузин, А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, А. И. Мальцев, А. Г. Курош, И. Р. Шафаревич, А. Я. Хинчин, Л. Я. Окунев, Л. А. Скорняков, Л. Я. Куликов, А. И. Кострикин, В. И. Арнольд, Ю. И. Манин, В. Л. Матросов, И. И. Баврин, А. Г. Мордкович, Р. Фейнман, Л. Чайлдс и др.).

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1) На основе исследования философских, исторических, психолого-педагогических, математических и методических аспектов проблемы разработана концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе, включающая:

опору на естественные пути построения математического знания, достигающуюся учетом происхождения и исторического пути становления математических теорий;

логико-эпистемологический анализ учебного материала как средство выявления логической генеалогии и гносеологической роли понятий и утверждений, организации логической структуры взаимосвязей математической теории и создания проблемных ситуаций;

ориентацию предметной подготовки будущих учителей математики на психологические особенности усвоения студентами математического содержания разных уровней сложности в построении специально продуманной деятельности по формированию и развитию математических понятий, в обеспечении мотивации учения;

концентрированное обучение математике, что включает в себя требования предвосхищения, основательности, повторения на разных уровнях, совмещения функций и экономии, варьирования, контраста, воздействия на различные каналы восприятия материала студентами.

2) Сформулированные автором принципиальные положения предлагаемой концепции обучения математическим дисциплинам в высшей педагогической школе реализованы в виде новых методических рекомендаций по построению и способам преподавания курса алгебры, по разработке систем изучения важнейших понятий этого курса, а также интегративных спецкурсов и спецсеминаров, по руководству научно-исследовательской и самостоятельной работой студентов в педагогических вузах, по применению информационных технологий в математической подготовке будущих учителей.

С позиций генетического подхода, разработана система изучения таких ключевых понятий курса алгебры, как теория групп, отношения эквивалентности, линейная зависимость.

На основе авторской концепции, разработана трехэтапная система изучения линии «делимость целых чисел – евклидовы кольца – многочлены», являющейся стержнем курса алгебры и непосредственно связанной с важнейшими элементами содержания школьной программы.

Теоретическая значимость исследования заключается в следующем:

1) Актуализирована проблема теоретической разработки генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе и обоснована необходимость ее решения.

2) Разработана теоретическая концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе, проанализированы ее исторический, логический и психологический аспекты.

3) Проанализированы основные новейшие тенденции зарубежной теории математического образования, в частности, теории подготовки учителей математики. Достижения зарубежной теории математического образования можно творчески использовать в дальнейшем развитии отечественной методики обучения математике.

4) Полученные результаты открывают возможности дальнейшей исследовательской работы с целью расширения сферы приложения предлагаемой концепции, разработки путей ее реализации в других дисциплинах математического цикла, а также иных естественнонаучных циклов, в педагогических вузах и, более того, также и в вузах другого профиля. Кроме того, предлагаемые подходы могут найти применение и в разработке методических вопросов преподавания школьной математики.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем:

1) Разработаны и проверены методические рекомендации по обучению курсам алгебры и теории чисел в педагогических вузах, учебные пособия и методические указания по алгебре и теории чисел для математических факультетов, по математике для факультета педагогики и методики начального образования;

2) Реализована система изучения таких ключевых понятий курса алгебры, как теория групп, отношения эквивалентности, линейная зависимость.

3) Реализована трехэтапная система изучения ключевой для курса алгебры линии «делимость целых чисел – евклидовы кольца – многочлены».

4) Разработаны новые интегративные спецкурсы и спецсеминары для педвузов, темы и рекомендации для научно-исследовательской работы студентов, в том числе с использованием информационных технологий.

5) Разработаны и реализованы циклы лекций для повышения квалификации школьных учителей, программа специального курса для учащихся старших классов школ с математическим уклоном.

6) Результаты исследования могут быть использованы авторами программ и учебных пособий по математическим дисциплинам для высшей школы, методистами и преподавателями математики педагогических и других вузов.

Достоверность результатов исследования обеспечивается следующими основаниями:

– опорой на фундаментальные исследования из областей психологии, педагогики, методики преподавания математики, философии математики;

– длительным характером опытно-экспериментальной деятельности в процессе личного преподавания и руководства работой других преподавателей кафедры, анализом этой деятельности;

– обобщением большого объема теоретических данных и практических наблюдений, опыта многих поколений деятелей математического образования;

– научной глубиной, доказательностью и обоснованностью теоретических положений, на которые опирается данное исследование;

– соответствием полученных результатов общим тенденциям в отечественной и мировой теории и практике математического образования.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

1. Теоретическое обоснование трактовки понятия «генетический подход к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе», который понимается как следование естественным путям

происхождения и применения математического знания в построении, методической разработке и осуществлении системы обучения математическим курсам и включает в себя исторический, логический и психологический аспекты.

2. Концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе.

3. Методическое обеспечение выдвинутой концепции, включающее:

– компоненты методической разработки системы изучения важнейших понятий математической дисциплины;

– систему компонентов предварительного анализа учебного материала;

– методику изучения ключевых понятий курса алгебры: теории групп, отношений эквивалентности, линейной зависимости;

– трехэтапную систему изучения ключевой для курса алгебры линии «делимость целых чисел – евклидовы кольца – многочлены».

4. Реализация концепции генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в учебном процессе по математическим дисциплинам в высшей педагогической школе (разработка, на основе генетического подхода, курса алгебры и интегративных спецкурсов, реализация принципов генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в различных формах организации учебного процесса).

5. Результаты анализа основных тенденций зарубежной теории математического образования, ведущими направлениями в которой являются французская «дидактика математики» и психологически ориентированный конструктивизм и достижения которой целесообразно творчески использовать в дальнейшем развитии отечественной методики обучения математике.

Апробация работы. Различные аспекты и результаты исследования докладывались автором и обсуждались на ряде научных мероприятий: на региональных межвузовских конференциях в Набережных Челнах (1995, 1996 гг.) и Уфе (1997 г.), на XVI, XVII и XVIII Всероссийских семинарах преподавателей математики университетов и педвузов (Новгород, 1997 г.; Калуга, 1998; Брянск, 1999 г.), на 51-х Герценовских чтениях (С.-Петербург, 1998 г.), на Международной конференции “Математическое образование на пороге 21-го века” (Самара, 1999 г.), на международных конференциях по дидактике математики в Фрибуре (Швейцария, 1993 г.), Дуйсбурге (Германия, 1994 г.), Регенсбурге, Лейпциге, Мюнхене (Германия, 1996-1998 г.), Потсдаме (Германия, 2000 г.), на 2-м Гауссовском симпозиуме (Мюнхен, 1993 г.), на 47-й (Берлин, 1995 г.) и 50-й (Невшатель, Швейцария, 1998 г.) конференциях CIEAEM (Международной комиссии по изучению и усовершенствованию математического образования), на международном семинаре по изучению взглядов на математику и ее преподавание (Хельсинки, 1996 г.), на 8-м (Севилья, Испания, 1996 г.) и 9-м (Токио-Макухари, 2000 г.) Международных конгрессах по математическому образованию, на 21-й (Лахти, Финляндия, 1997 г.), 23-й (Хайфа, Израиль, 1999 г.) и 24-й (Хиросима, Япония) международных конференциях по психологии математического образования, на 1-й конференции Европейского общества исследователей математического образования (Оснабрюк, Германия, 1998 г.).

Внедрение результатов исследования в практику. Разработанные в исследовании положения, программы обязательных и специальных курсов, рекомендации по методике преподавания математических дисциплин, по организации самостоятельной и научно-исследовательской работы студентов внедрены в учебный процесс Набережночелнинского, Башкирского (г. Уфа), Елабужского педагогического институтов, Института непрерывного педагогического образования г. Набережные Челны. На основе материалов диссертации разработаны курсы алгебры и теории чисел, числовых систем, математической логики, элементарной математики (с практикумом по решению задач), математики для дневного и заочного отделений специальности «педагогика и методика начального обучения», специальные курсы для студентов-математиков, циклы лекций для учителей и кружковые занятия для учащихся школы с математическим уклоном. Материалы работы также неоднократно использовались при написании курсовых и дипломных работ студентами. В учебном процессе и самостоятельной работе студентов используются написанные автором учебное пособие и методические указания по алгебре и теории чисел, методические пособия, аннотированные программы отдельных курсов и государственных экзаменов.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность исследования, сформулированы объект, предмет, цель исследования, представлены научная проблема и гипотеза исследования, решаемые в работе задачи, методологическая основа, методы и теоретические источники исследования, его научная новизна, теоретическая и практическая значимость, положения, которые выносятся на защиту.

В первой главе "Проблемы и тенденции в математическом образовании и подготовке учителей математики" дан анализ современных проблем и тенденций в отечественной теории и практике математического образования учителей, в зарубежной теории математического образования вообще и подготовки учителей математики, в частности; приведены результаты исследований убеждений учителей, учащихся и студентов педагогического вуза, касающихся математики и ее преподавания, сделаны выводы о необходимости разработки и использования в математической подготовке будущих учителей наиболее эффективных методических принципов и приемов.

В § 1 «Проблемы математической подготовки будущих учителей математики» сделан обзор отечественных работ, посвященных теоретическим основам обучения математике в высшей педагогической школе, приведены данные о проблемах в практике преподавания математических дисциплин будущим учителям. Отмечено, что в математической подготовке студентов педагогических институтов по-прежнему остаются актуальными такие проблемы:

– низкий уровень владения современным математическим знанием;

– слабое знание связей между вузовским и школьным курсами математики;

– приверженность студентов и преподавателей педвузов в основном догматическому и объяснительному типам обучения.

Для решения проблем отечественными теоретиками математического образования будущих учителей предлагаются, в частности, следующие идеи:

– усилить профессиональную направленность математических курсов за счет усиления в них методической линии (А. Г. Мордкович, Г. Л. Луканкин, В. А. Тестов, Л. В. Шкерина);

– вести преподавание, используя передовые идеи в методике, с тем, чтобы студенты перенимали и усваивали эти идеи и применяли их в дальнейшей своей профессиональной деятельности (М. Н. Скаткин, А. Г. Мордкович, Т. С. Полякова, Г. И. Саранцев);

– разрабатывать интегративные курсы, соединяющие элементы высшей математики с разделами школьной (А. Г. Мордкович, О. А. Иванов);

– развивать многоуровневость и дифференциацию в математическом образовании будущих учителей (В. А. Гусев, В. А. Кузнецова, Г. Г. Хамов);

– развивать в студентах навыки творческого мышления, исследовательской и методической работы по математике (А. В. Ястребов, Е. И. Смирнов, А. Г. Солонина).

В § 2 «Современные тенденции в математическом образовании и подготовке учителей за рубежом» делается обзор основных тенденций современной зарубежной теории математического образования вообще и подготовки учителей математики, в частности.

Подробно проанализированы такие влиятельные направления, как французская «дидактика математики», конструктивизм, исследование решения задач.

Изложим основные разработки «французской дидактики» (лидер – Г. Бруссо)[8].

Обучение ведется с помощью а-дидактических или дидактических ситуаций. *А-дидактическая ситуация* – это ситуация обучения без учителя, когда ребенок вовлекается в игру в умело подобранной «учебной среде» (milieu), и «вынужден» использовать математические понятия, если только он решил участвовать в игре. *Дидактические ситуации* строятся с помощью учителя. При этом взаимоотношения и взаимная ответственность учителя и учащихся в дидактической ситуации регулируются *дидактическим контрактом.* Один из простейших видов дидактической ситуации – *деволюция*: учитель может поставить проблему перед учениками и сам незаметно удалиться со сцены, как бы делегируя учащимся ответственность за разрешение проблемы. Знания, самостоятельно «построенные» учащимися в совместной классной работе, должны быть затем синтезированы и «легализованы» учителем. Это действие называется *институционализацией.* Для разработки дидактических ситуаций необходимо проводить глубокий *эпистемологический*[9] *анализ* содержания. Деятельность по такому анализу называется *дидактической инженерией.* В частности, дидактическая инженерия призвана анализировать *эпистемологические препятствия* (привычные понятия, непригодные для объяснения нового содержания, но мешающие овладению новым знанием), важные для установления значения приобретаемого знания.

Кроме «французской дидактики», другим важнейшим направлением в изучении проблем математического образования не только в Европе, но и в других частях света (в США, Японии, Австралии) было исследование решения задач. Это направление, заложенное выдающимся математиком-педагогом Д. Пойа, развивалось под влиянием его идей и стало особенно популярно с конца 70-х годов, когда неудача реформы по введению «новой математики» в школьные программы по всему миру стала очевидной. Интенсификации исследований по решению задач стимулировалась также вниманием к решению задач в работах по «искусственному интеллекту». И если европейские и американские авторы развивают стратегии решения задач в духе Пойа, японские специалисты эффективно используют метод «открытых задач».

Наиболее влиятельное в США и авторитетное также в Европе в 80-е и первой половине 90-х годов направление в математическом образовании, не потерявшее своего значения и до сих пор – *конструктивизм.*

---

[8] см., например, Sierpinska, A. Some reflections on the phenomenon of French didactique // *Journal fuer Mathematik-Didaktik,* B. 16, Heft 3/4, 1995, S. 163-192.

[9] Эпистемология – теория познания.

Основополагающие принципы конструктивизма[10]:
1) Знание не воспринимается пассивно, а активно строится познающим субъектом. 2) Функция познания адаптивная и служит для организации данного в опыте мира, а не для открытия онтологической реальности.

Конструктивизм опирается на идеи Ж. Пиаже о развитии генетических структур (поведения, мышления) посредством *адаптации* познающего субъекта к окружающим условиям.

Внимание конструктивистов акцентируется не на общих закономерностях формирования понятий (как в деятельностном подходе или в французской дидактике), а на особенностях построения знаний данным конкретным учащимся, данным конкретным классом. Большое значение при этом приобретают *обратная связь* и *рефлексия* в процессе обучения: для обучения тем или иным темам разрабатываются не *планы*, а *стратегии*, которые могут по ходу дела, в соответствии с реакциями и достижениями учащихся, корректироваться.

Каждый урок, серия уроков, прохождение какого-либо раздела или темы для конструктивиста – *обучающий эксперимент*, по результатам которого он делает выводы для дальнейшего обучения данных учащихся.

В последние годы главными достижениями зарубежной теории подготовки и переподготовки учителей математики были результаты, связанные с выявлением наиболее существенных направлений подготовки (знания – убеждения и действия – рефлексия), с описанием состава и структуры наиболее сложного компонента образования учителей – системы их знаний, признание необходимости собственных письменных исследований учителей, а также их активного взаимодействия и обмена опытом как друг с другом, так и с исследователями. Отметим, что, так же как и отечественные методисты, зарубежные исследователи (А. Виттенберг, Т. Дж. Флетчер, Х.-Х. Райхель, Э.-Х. Виттманн) подчеркивали необходимость интегративных (т. е. совмещающих и математическую, и методическую, и эпистемологическую и т. д. подготовку) математических курсов для полноценной подготовки учителей математики.

В § 3 «Проблема теоретической разработки генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педвузах» рассматривается происхождение проблемы исследования и отмечается, что в настоящее время в отечественной и зарубежной науке сложились предпосылки для теоретической разработки генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педвузах.

Во-первых, получили широкое признание и развитие труды Л. С. Выготского и его последователей (А. Н. Леонтьев, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов и др.), посвященные изучению, с позиций деятельностного под-

---

[10] Glasersfeld, E. von. Costructivism in Education // Husen T. & Poslethwaite (Eds.) *International Encyclopaedia of Education,* Supplementary Volume. Oxford: Pergamon Press, 1989, pp. 162-163.

хода, мышления, развития системы научных понятий, теоретических обобщений в обучении.

Во-вторых, имеются достижения в исследовании развития понятий с философских точек зрения диалектической логики (Б. М. Кедров, Э. В. Ильенков, В. В. Давыдов) и системного подхода (Л. Берталанфи и др.).

В-третьих, сегодня доступны достижения западных исследований по психологии и теории математического образования, в частности, труды Ж. Пиаже (включая поздние работы) по генетической эпистемологии и работы его последователей – специалистов по математическому образованию.

В § 4 «Психолого-педагогические предпосылки теоретической разработки генетического подхода к обучению математике» рассматривается история и современное состояние отечественных и зарубежных психологических, дидактических и методических исследований, затрагивающих те или иные аспекты генетического подхода к обучению математике.

Принцип генетического подхода в обучении математическим дисциплинам заключается в том, что методика обучения предмету должна опираться, по мере возможности, на естественные пути и методы познания, присущие соответствующей науке. Обучение должно следовать путям *происхождения знания.*

По-видимому, первым использовал словосочетание «генетическое изложение» выдающийся немецкий дидакт Ф. В. А. Дистервег (1790-1866). Применял термин «генетический способ изложения» и Феликс Клейн в своей знаменитой книге «Элементарная математика с точки зрения высшей». Заметим, что идеи генетического подхода к обучению высказывались уже задолго до Дистервега такими учеными, как Лейбниц и Гегель.

За генетический подход к преподаванию математики выступали (порой не применяя терминов «генетический подход», «генетический принцип» или «генетический метод») такие известные зарубежные и отечественные методисты, как Д. Пойа, М. Вагеншайн, Х. Фройденталь, А. В. Ланков, В. Ф. Лебединцев, В. М. Брадис. Близки к генетическому подходу методические идеи С. И. Шохор-Троцкого, А. П. Минакова, А. М. Пышкало, А. Г. Мордковича, Л. М. Фридмана, дидактические идеи М. Н. Скаткина[11].

Наиболее ярким представителем психолого-генетического подхода является Ж. Пиаже, создатель *генетической эпистемологии.* В 1983 году Ж. Пиаже совместно с Р. Гарсиа, специалистом по истории и методологии науки, опубликовал книгу «Психогенез и история науки», где были выявлены определенные параллели между психогенезом математических структур в индивиде и историей возникновения и развития этих структур в различных направлениях математической науки. Ж. Пиаже также разрабо-

---

[11] Дидактика средней школы: некоторые проблемы современной дидактики. М.: Просвещение, с. 67.

тал теорию *рефлективной абстракции*[12] (объясняющую переход от действий и операций субъекта к абстрактному знанию и от низших ступеней абстракции к высшим – например, от сложения к умножению).

В истории и современном состоянии генетического подхода наблюдается значительное разнообразие интерпретаций терминов "генетический принцип", "генетический метод", "генетический подход к обучению математике".

Исходя из анализа различных интерпретаций генетического подхода к обучению математике в классике математического образования, из наблюдений за сегодняшним опытом преподавания вузовской математики и из последних достижений психологии и методики обучения математике, мы можем раскрыть содержание и особенности генетического подхода к преподаванию математических курсов в педвузах.

Обучение математической дисциплине называется *генетическим*, если оно следует естественным путям происхождения и применения математической теории.

Учитывая многочисленные описания генетического подхода в литературе по математическому образованию, данные теории познания, а также теории, практики и психологии математического образования, можно заключить, что генетическое обучение математическим дисциплинам в высшей педагогической школе должно обладать следующими свойствами:

1) генетическое обучение следует естественным путям происхождения и применения математической теории;
2) генетическое обучение дает ответ на вопрос: как может быть объяснено развитие содержания математической теории?
3) генетическое обучение осуществляется с опорой на ранее приобретенные знания, опыт и уровень мышления обучаемых;
4) при изучении новых тем и понятий используются проблемные ситуации и широкие контексты (отвечающие опыту обучаемых) нематематического или математического содержания;
5) в обучении широко используются задачи и естественно возникающие вопросы, решения которых студенты ищут самостоятельно с минимально необходимой эффективной помощью со стороны преподавателя;
6) строгим и абстрактным рассуждениям должны предшествовать интуитивные или эвристические рассмотрения;
7) должны осуществляться стимулирование мыслительной деятельности обучаемых, постоянная мотивация их познавательной активности;

---

[12] Пиаже, Ж. (1983). Психогенез знаний и его эпистемологическое значение // *Семиотика.* М.: Радуга, с. 93-94.

8) должно осуществляться постепенное обогащение изучаемых математических объектов взаимосвязями с другими объектами, рассмотрение изученных объектов и фактов с новых точек зрения, в новых контекстах.

На наш взгляд, уже в первой половине двадцатого века Н. Извольский, а вслед за ним и Н. Бескин близко подошли к плодотворному описанию генетического подхода к преподаванию математики. Более поздние труды психологов и методистов обогатили генетический подход конкретными научными сведениями, прежде всего о путях познания, о том, как учащиеся овладевают понятиями, наконец, о развитии теоретического мышления.

Тем не менее, генетический подход еще не признан как один из основных принципов преподавания математики в школе и особенно в вузе.

Поскольку, на наш взгляд, генетический подход должен стать основополагающим принципом обучения математике, очень важно, чтобы будущие учителя математики не только глубоко овладели им еще в студенческие годы, но и прониклись убеждением в его действенности и привлекательности. Для этого прежде всего необходимо применять этот подход в преподавании специальных математических дисциплин в педвузе. Необходимо разработать теоретические основы генетического подхода к преподаванию математики в педагогических институтах.

Во второй главе «Концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педагогическом вузе» предлагается названная концепция, включающая:

опору на естественные пути построения математического знания, достигающуюся учетом происхождения и исторического пути становления математических теорий;

логико-эпистемологический анализ учебного материала как средство выявления логической генеалогии понятий и утверждений, организации логической структуры взаимосвязей математической теории и создания проблемных ситуаций;

ориентацию предметной подготовки будущих учителей математики на психологические особенности усвоения студентами математического содержания разных уровней сложности в построении специально продуманной деятельности по формированию и развитию математических понятий, в обеспечении мотивации учения;

концентрированное обучение математике, что включает в себя требования предвосхищения, основательности, повторения на разных уровнях, совмещения функций и экономии, варьирования, контраста, воздействия на различные каналы восприятия материала студентами.

В § 1 «Опора на естественные пути происхождения математического знания» показывается, как для поиска естественных путей построения и преподавания математических теорий используется история происхождения и становления математики.

Ф. Клейн и одновременно с ним А. Пуанкаре, выступая за генетический подход к преподаванию, ссылались на сформулированный в 1866 году основной биогенетический закон Э. Геккеля («Онтогенез повторяет филогенез»): «Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем»[13]. Однако позднее многие крупные ученые-методисты, в том числе российские, пересмотрели взгляд на генетический подход как на преимущественно исторический. О. Теплиц, А. Виттенберг, Н. А. Извольский, Н. М. Бескин выдвигали на первый план не историю, а генезис проблем, фактов и доказательств, принципы, определяющие развитие и современное состояние математических дисциплин.

В. В. Давыдов считает важнейшим для методического воплощения своей теории учебной деятельности *исторический* аспект генетического подхода[14]. В обучении вузовским дисциплинам учет происхождения и исторического пути математических теорий может помочь в поиске естественных путей построения математического знания. Так, например, история зарождения и развития теории групп показывает, что понятие группы возникло как оптимальное решение проблемы организации идей, связанных с понятиями перестановок, биекций, симметрий и геометрических преобразований. Поэтому примеры, связанные с такими идеями, могут служить полноценному и естественному (по необходимости длительному) формированию понятия группы в процессе обучения.

Тем не менее, на наш взгляд, в обучении вузовским математическим дисциплинам историко-генетический подход не всегда применим в силу крайней сложности исторического хода становлении таких сложнейших математических теорий, как, например, абстрактная алгебра. Поэтому не менее, а порой и более важное значение приобретают логические аспекты генетического подхода (мы не говорим о психологическом аспекте, который важен в любой интерпретации).

В § 2 рассматриваются логические аспекты генетического подхода к обучению математическим дисциплинам.

Некоторые авторы прямо понимали генетический метод как следование именно логике развития науки[15].

---

[13] Пуанкаре, А. Наука и метод. // Пуанкаре, А. *О науке.* М.: Наука, 1990, с. 463.

[14] Давыдов, В.В. *Теория развивающего обучения.* М.: ИНТОР, 1996, с. 268.

[15] Чошанов, М. А. *Гибкая технология проблемно-модульного обучения.* М.: Народное образование, 1996, с. 102.

Логика, соотношение логического и исторического в познании были в центре рассмотрений и отечественных теоретиков психологии образования – С. Л. Рубинштейна и В. В. Давыдова. Пути использования законов диалектической логики и теории познания для построения учебной деятельности глубоко развиты в исследованиях последнего.

Важнейший аспект логической организации учебного материала заключается в том, чтобы организовать материал таким образом, чтобы выявить необходимость построения и развития тех или иных понятий и идей. Надо располагать материал так, чтобы возникали проблемные ситуации или задачи, оптимальным решением которых служили бы понятия или идеи, которые предстоит изучить. Для этого необходим анализ проблем познания, решением которых служат рассматриваемые понятия и идеи. Этому может помочь и исторический анализ, и диалектико-логическое рассмотрение с выделением содержательной абстракции – "клеточки", нахождением и разрешением противоречий в этой клеточке, и специальный поиск подходящих проблемных ситуаций и задач. Такие задачи естественно возникают, например, при расширениях числовых систем. Скажем, введение комплексных чисел оправдывается невозможностью извлечения действительного квадратного корня из -1. Еще лучшей проблемной ситуацией могла бы служить задача решения кубических уравнений с вещественными коэффициентами, где использование мнимых чисел неизбежно в промежуточных вычислениях в случае, когда все корни действительны.

Другой пример разрешения проблемной ситуации – конструкция *деления с остатком*, возникающая как ответ на проблему: не любые два числа находятся в отношении *делимости*.

Исторический и эпистемологический анализ в ряде случаев помогает выявить круг сложных идей и конструкций, проблему организации которого разрешает введение того или иного понятия. Так, понятие группы служит оптимальным решением проблемы организации идей и понятий, связанных с множествами перестановок, биекций (в частности, геометрических преобразований и симметрий). Понятие отношения эквивалентности служит организации идей, связанных с проблемами классификации. Понятие линейной зависимости служит организации идеи минимизации множества образующих векторного подпространства, и поэтому именно вокруг этой идеи целесообразно организовать обучение. Понятие евклидова кольца служит организации идей и конструкций, связанных с вопросами делимости и выполнения алгоритма Евклида вычисления наибольшего общего делителя с помощью деления с остатком, однозначного разложения на простые (неприводимые) множители.

Можно рассмотреть и простые примеры искусственного создания проблемных ситуацией. Скажем, можно предъявить для сравнения и обобщения свойства сложения целых чисел и умножения ненулевых действительных чисел, и оптимальным решением для этой задачи обобщения будет служить понятие группы с ее аксиомами.

Для логической *организации* математического материала большое значение имеют средства формальной и математической логики.

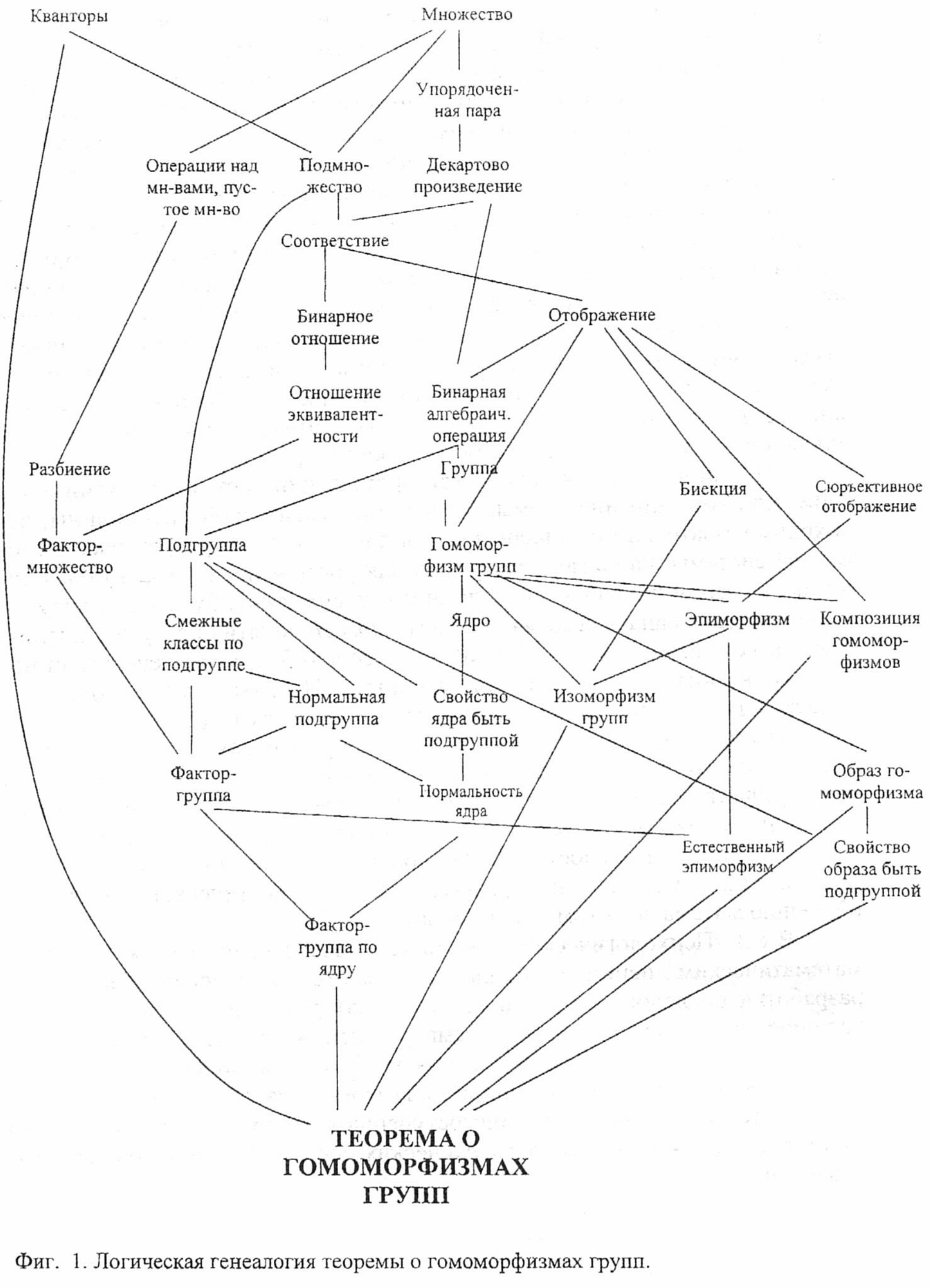
В доказательстве теорем генетический подход связан с *аналитическими* доказательствами (использующими «обратный» ход рассуждений по сравнению с формально-логическими *синтетическими* доказательствами).

При генетическом подходе, аксиоматический метод вводится очень осторожно, постепенно. Так, элементы теории чисел на 1 курсе излагаются на основе интуитивного понимания целых чисел, хотя все теоретико-кольцевые свойства множества целых чисел, а также принцип математической индукции предполагаются известными. Аксиоматическое же изложение теории натуральных чисел (с системой аксиом Пеано) и построение кольца целых чисел как фактор-множества с определенными операциями откладывается до курса "Числовые системы", когда студенты не только овладеют необходимыми понятиями, например, кольца и фактор-множества, но и получат достаточный опыт математических рассуждений для понимания построения аксиоматических теорий.

На наш взгляд, для логической организации системы понятий и утверждений той или иной темы, раздела математической дисциплины, необходимо тщательно проанализировать логическую структуру рассматриваемой системы, например, требуемой для построения того или иного понятия, для формулировки того или иного утверждения. Будем называть результаты такого анализа *логической генеалогией* понятия или утверждения. В вузовской математике, особенно в высшей алгебре, такие генеалогии могут быть весьма сложными и разветвленными. Например, в следующей логической генеалогии теоремы о гомоморфизмах групп (с. 24) некоторые элементы даже опущены (например, условия рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношений эквивалентности). Понятно, что такая разветвленная структура понятий и утверждений, знание которых необходимо для понимания теорем подобной сложности, требует хорошо разработанной деятельности для полноценного овладения. Поэтому важное значение имеет и психологический аспект генетического подхода к обучению математическим дисциплинам.

В § 3 «Психологические аспекты генетического подхода к обучению математическим дисциплинам» рассматриваются психологические основы разработки последовательности изучения материала, деятельности по овладению понятиями, а также проблемы развития мотивации учения.

Главная трудность исследования учебной деятельности в процессе изучения математических дисциплин в высшей педагогической школе (и в университетах) заключается в многоступенчатости абстракций, особенно в таких разделах, как теория алгебраических систем, функциональный анализ и т. п.



Фиг. 1. Логическая генеалогия теоремы о гомоморфизмах групп.

А. А. Столяр[16] выявил 5 уровней мышления в области алгебры и отметил, что «традиционное школьное преподавание алгебры не подымается выше третьего уровня, причем в части логического упорядочения свойств операций и этот уровень достигается не полностью».

5-му уровню соответствует дедуктивное изучение групп, колец, упорядоченных множеств и т. п. Высшая степень абстракции здесь – изучение общих алгебраических систем с различными многоместными операциями.

А. А. Столяр строил свою классификацию уровней с позиций методики обучения школьной алгебре. На наш взгляд, развитие алгебры как науки в последние десятилетия позволяет выделить еще один высший, 6-й уровень алгебраического мышления – назовем его *уровнем алгебраических категорий.* На этом уровне рассматриваются уже целые классы алгебраических систем вместе с гомоморфизмами этих систем – многообразия универсальных алгебр, категории алгебраических и иных структур (например, топологических пространств, множеств и иных объектов).

При этом происходит абстрагирование от конкретных операций в этих структурах и от природы гомоморфизмов и вообще отображений (*морфизмы* между объектами категорий рассматриваются просто как стрелки, подчиненные аксиомам категорий – например, ассоциативности композиции морфизмов). Более того, рассматриваются функторы между категориями – определенные отображения, согласованные с законами композиции морфизмов, и *естественные преобразования* функторов.

Обучение на таком уровне не входит в обязательную программу даже ведущих университетов и происходит лишь на спецкурсах, на старших курсах. Но, тем не менее, существование такого уровня обязывает довести студентов в обучении обязательным курсам до такого овладения понятиями, чтобы они были готовы понять алгебраические идеи и на таком, высшем уровне абстракции.

Основными же в обучении алгебре и теории чисел в педвузе являются 4-й и 5-й уровни по классификации А. А. Столяра, причем сначала должен быть достигнут 4-й уровень (содержательных дедуктивных теорий), на котором в школе обучение не ведется. Поэтому, даже введя с самого начала изучения курса алгебры определение группы, не следует сразу начинать полное дедуктивное изложение аксиоматической теории групп. Лишь после опыта обучения на 4-м уровне мышления в области алгебры, при изучении элементов теории чисел, можно рассматривать дедуктивный вывод достаточно простых конструкций и утверждений теории групп, а систематическое изложение сложных разделов теории следует отложить до более позднего времени, после закрепления обучения на 4-м уровне при изучении комплексных чисел и арифметических векторных пространств.

---

[16] Столяр, А. А. (1986). *Педагогика математики.* Минск: Вышэйшая школа, 1986, с. 58-60.

При изучении педвузовской алгебры на каждом уровне обучающиеся сталкиваются с последовательно возрастающими ступенями абстракции – своеобразной «лестницей абстракций».

По теории А. Н. Леонтьева, действия по овладению понятиями, как и любые действия, состоят из операций, которые мало осознаются или совсем не осознаются. Эти операции суть «свернутые» действия с понятиями предыдущего уровня абстракции. О «свертывании» мыслительного процесса в обучении математике писали многие психологи: Л. С. Выготский, В. А. Крутецкий и др. По М. А. Холодной[17], «свертывание – экстренная реорганизация всего множества имеющихся... сведений относительно данного понятия и превращение их в обобщенную знаниевую структуру».

На наш взгляд, для достижения свертывания действия с алгебраическими объектами в (автоматическую) умственную операцию необходимо, после достаточной отработки этого действия включить это действие в другое действие – по построению объектов следующей ступени абстракции.

Развитию мотивации учения служат *элементы языкового и эмоционального стиля преподавания* (в частности, неожиданность и юмор, приемы эстетического воздействия).

Важным психологически обоснованным средством развития мотивации учения является открытый А. Н. Леонтьевым[18] феномен *сдвига мотива на цель*. Так, при изучении математической логики, рассматривая применение логических операций к упрощению релейно-контактных схем, некоторые студенты – будущие учителя физики и математики, сначала решали подобные задачи в силу своей инженерной интуиции, реального опыта упрощения таких схем. Здесь мотивом было упрощение схем, цель же была в том, чтобы научиться использовать преобразования логических формул для такого упрощения. Добившись же успехов в решении таких задач с помощью средств математической логики, студенты уже были мотивированы для более глубокого изучения содержания предмета математической логики.

Принцип генетического подхода описывает наиболее общие, исходные подходы к обучению, к отбору содержания, планированию последовательности изучения материала. Конкретному построению методики обучения математической дисциплине с учетом богатства и многообразия процесса обучения помогает еще один предлагаемый нами принцип – принцип *концентрированного обучения*, раскрытию которого посвящен §4.

---

[17] Холодная, М. А. *Психология интеллекта: парадоксы исследования.* М.: Барс, 1996, с. 332.
[18] Леонтьев, А. Н. *Проблемы развития психики.* М.; Изд-во МГУ, с. 310-311.

Под принципом концентрированного обучения будем понимать положение о том, что для достижения существенного образовательного эффекта необходимо применять целый комплекс приемов, направленных на осуществление максимально концентрированного воздействия на обучаемых. Комплекс включает в себя несколько групп приемов. Первая группа состоит из приемов, связанных с отбором и расположением учебного материала.

Термину «концентризм» (в обучении) в разное время и разными авторами придавались различные значения. Самое распространенное понимание – следующее: предмет обучения разбивается на части – концентры, причем более поздние (по времени изучения) концентры в определенной степени повторяют и углубляют предыдущие. Так, в частности, понимал концентризм Л. С. Выготский[19]. Однако А. Н. Колмогоров писал: "…Естественный порядок наращивания знаний и умений всегда имеет характер "развития по спирали". Логика науки не знает никакого одного преимущественного «линейного» расположения материала (даже в пределах одной научной дисциплины). Она не требует, с другой стороны, и того, чтобы процесс наращивания знаний с неизбежным возвращением с новой точки зрения к ранее изученному распадался на «концентры». Говоря образно, «спираль» не обязательно разбивать на отдельные витки"[20].

Наиболее известный вариант концентризма в современной теории образования – "спиралевидная программа" Дж. Брунера[21].

В работах по методике преподавания вузовской математики принцип концентризма почти не встречался. Однако стоит упомянуть работы А. Г. Мордковича, В. А. Гусева и В. А. Тестова. Близки к концентризму предложения А. Г. Мордковича по *пропедевтике* в математических курсах для студентов педвузов. Мордкович рассматривает пропедевтику в двух направлениях: 1) вводные лекции перед изучением того или иного раздела, где ограничиваются наглядными соображениями, правдоподобными рассуждениями, очерком основных понятий; 2) использование понятия до его формального определения на незавершенном конкретно-интуитивном уровне[22]. Сходные мысли высказывает В. А. Гусев: «Обсуждаю то, что вижу, понимая, что не сразу будет достигнута полная ясность и информация об увиденном»[23]. О спиралеобразном расположении

---

[19] Выготский, Л. С. *Педагогическая психология*. М.: Педагогика-пресс, 1996, с. 87

[20] Колмогоров, А. Н. К обсуждению работы по проблеме "Перспективы развития советской школы на ближайшие тридцать лет" // *Математика в школе*, 1990, № 5, с. 60.

[21] Брунер, Дж. *Психология познания*. М.: Прогресс, 1977.

[22] Мордкович, А. Г. *Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте.* Диссертация на сокискание ученой степени доктора педагогических наук. М.: АПН СССР, 1986, с. 105.

[23] Гусев, В. А. (1995). *Методика преподавания курса «Геометрия 6-9».* М.: Авангард, с. 10.

содержания в учебных программах писал также В.А. Тестов, о близком к идеям концентризма принципе «матрешки» - Ю. В. Сидоров[24].

Учитывая все вышесказанное, мы считаем целесообразным спиралевидное расположение учебного материала, причем, на наш взгляд, требование спиралевидного расположения материала может быть конкретизировано в виде двух важных содержательных элементов: *подготовки* (*предвосхищения*) и *повторения на разных уровнях* (с *усилением*). Теперь мы можем сформулировать первые два элемента концентрированного обучения.

1) *Подготовка* и, в частности, *предвосхищение*.

2) *Повторение* на разных уровнях и *усиление*.

Выделим еще три важных требования для отбора и расположения материала. Эти требования служат проведению психологических принципов целостности и системности, преемственности и «обогащения».

3) *Фундаментальность,* или *основательность* (требование глубокого и основательного изучения тщательно отобранного фундамента учебной дисциплины).

4) *Совмещение функций* (одни и те же приемы, задачи, идеи применяются в разных местах курса или рассматриваются с разных сторон, несут различные функции обучения и воздействия на студентов).

5) *Зацепление* (вплетение материала одного отдела в материал другого).

Таким образом, требования принципа концентрированного обучения относятся как к построению курса в целом (подготовка, предвосхищение, повторение и углубление, метод сквозных задач), так и к разработке отдельной темы (совмещение функций, зацепление, метод обзорных лекций, метод последовательных улучшений).

Принцип концентрированного обучения связан также с множественностью средств воздействия на обучаемых. В частности, важное значение имеет *композиция* (учебного курса, раздела, отдельной лекции).

Отметим еще несколько важных приемов, связанных с расположением материала:

6) *варьирование* (проведение через разное: например, показ разных точек зрения, варьирование признаков понятия и т. п.);

7) *разбиение* (материала на меньшие куски);

8) *контраст*.

Говоря о *множественном воздействии*, нельзя обойти вниманием педагогические приемы, направленные на различные каналы восприятия материала студентами. Поэтому концентрированное обучение должно дополнительно включать следующие элементы:

---

[24] Сидоров, Ю. В. (1994). *Преемственность в системе обучения алгебре и математическому анализу в школе и в вузе.* Диссертация в форме научного доклада на соискание ученой степени доктора педагогических наук. М.: МПГУ, с. 16.

9) *средства воздействия через различные каналы восприятия информации* (например, по Дж. Брунеру[25]: действенный, наглядно-образный и словесно-символический способы получения субъектом информации).

В §5 «Прикладная направленность в обучении математике» рассматривается возможность использования в обучении различных интересных и полезных приложений математической теории.

Среди приложений должны быть и внутриматематические приложения – мостики к новым идеям, темам и понятиям курса. Кроме того, должен постоянно поддерживаться *интерес* студентов. Особенно важно показывать неожиданные приложения математических понятий и результатов в новых областях, в том числе в гуманитарных науках, в искусстве.

Обилие неожиданных приложений обусловлено «непостижимой эффективностью математики»[26]. Так, многие конструкции элементарной теории чисел, считавшейся ранее «чистой наукой», ныне широко используются в создании вычислительных алгоритмов и вообще в информатике.

В § 6 предлагается строить методическую разработку системы изучения учебного материала (раздела курса, важного понятия или системы понятий) из двух частей – *предварительного анализа* последовательности, средств и методических приемов и конкретного *проектирования* процесса обучения.

Анализ состоит из двух этапов: 1) *генетической разработки материала* и 2) *анализа расположения материала и возможностей использования различных средств представления материала и воздействия на обучаемых*.

Генетическая разработка материала, в свою очередь, представляет собой анализ изучаемого материала с четырех точек зрения: а) исторической; б) логической; в) психологической; г) прикладной.

После двух этапов анализа необходимо осуществить *проектирование* процесса изучения учебного материала. При этом процесс изучения целесообразно разбить на четыре стадии: *1) Построение проблемной ситуации. 2) Постановка новых естественно возникающих вопросов. 3) Понятийно-структурный анализ и логическая организация учебного материала. 4) Развитие приложений и алгоритмов.*

На всех стадиях изучения раздела или темы необходимо заботиться о воспитании в студентах *познавательных стратегий*: развивать в них *дивергентное мышление*, временами предлагать «открытые задачи»; отучать от *автоматизма* и привычки действовать по готовым схемам, для чего предлагать нестандартные вопросы и задачи с неожиданными решениями и ответами, парадоксы; воспитывать умение *аргументировать*,

---

[25] Брунер, Дж. *Психология познания*. М.: Прогресс, 1977.

[26] Вигнер, Е. *Этюды о симметрии*. М.: Мир, 1971.

обосновывать свои ответы и решения; поощрять использование *интуиции* и *догадки*; учить студентов *эвристическим* стратегиям в решении задач. Очень важно помогать студентам развивать собственный *язык* для выражения своих рассуждений и идей. Для этого полезно по возможности каждое предложение (определение или утверждение) формулировать (на лекциях, практических занятиях, в учебниках) на различных языках, например, логико-символическом и вербальном. Необходимо также давать студентам задания на развитие мыслительных операций (анализ, синтез, обобщение, сравнение, аналогия, абстрагирование, конкретизация). Например, будут полезны упражнения на извлечение выводов из теоретических положений. Наконец, очень важно поощрять в студентах *рефлексию*.

В третьей главе «Осуществление генетического подхода к обучению в разработке и преподавании математической дисциплины» детально рассматривается построение программы и методика преподавания отдельных тем педвузовского курса алгебры на основе предлагаемой нами концепции.

В § 1 показано, как генетический подход и, в частности, принцип концентрированного обучения применяются в отборе содержания и в построении программы математического курса.

§ 2 «Разработка системы изучения важнейших понятий алгебры» посвящен обучению таким стержневым понятиям и идеям курса алгебры, как понятия группы (представляющей более общую идею алгебраической системы), евклидова кольца (вместе с идеями алгоритма Евклида и однозначного разложения на простые множители), отношения эквивалентности (вместе с идеей разбиения на классы) и линейной зависимости. Для надлежащей мотивации успешного овладения студентами этими абстрактными идеями и понятиями необходима тщательная разработка проблемных ситуаций, для того чтобы введение таких понятий происходило максимально естественно. В этом параграфе показано, как генетический подход к обучению может помочь в этом.

В § 3 и 4 показано, как в обучении материалу вводного раздела, а также разделов «Элементы теории чисел» и “Множества и алгебраические операции” можно осуществить отбор материала и разработать методику преподавания отдельных тем, основываясь на сформулированных нами принципах: уже само изучение теоретико-числовой части в начале курса алгебры и теории чисел является проявлением *генетического подхода*, ибо теоретико-числовые задачи возникают достаточно естественно, а развитые в этой части конструкции и идеи также естественным образом ведут к более сложным конструкциям и идеям теории многочленов и абстрактной алгебры. Реализован и принцип *концентрированного обучения* (конструкции и идеи теории чисел *предвосхищают* конструкции и идеи дальнейших, более сложных разделов курса, в преподавании отдельных тем выполняются требования фундаментальности, повторения, совмещения функций, зацепления; постоянно используются приемы разбиения, варьирования и всестороннего рассмотрения объектов, контраста, различных способов передачи информации, неожиданности).

В § 5 "Особенности методики преподавания отдельных тем других частей курса" рассматривается обучение таким разделам, как линейная алгебра, группы, кольца и поля и теория многочленов.

Показано, что и в преподавании этих разделов немаловажно значение генетического подхода (рассматриваются прежде всего естественно возникающие примеры и проблемы, ищутся наиболее целесообразные приемы решения этих проблем, используются аналитические и аналитико-синтетические доказательства).

Четвертая глава посвящена осуществлению генетического подхода к обучению в различных формах организации обучения.

В § 1 "Особенности различных форм организации обучения и оценки успехов студентов" рассматриваются организация практических занятий, отбор системы упражнений и задач, организация самостоятельной, научно-исследовательской и учебно-исследовательской работы студентов, а также применение информационных технологий в математической подготовке будущих учителей.

Главным содержанием практических занятий, на наш взгляд, попрежнему должно оставаться *решение задач*. Генетический подход в решении задач может быть реализован как *метод целесообразных задач*[27].

Показано, что и в организации практических занятий важно следование принципам генетического подхода (метод целесообразных задач, аналитические и аналитико-синтетические рассуждения в процессах решения), концентрированного обучения (сквозные идеи, совмещение функций, варьирование, расчленение трудностей).

Предлагается использовать на практических занятиях задачи следующих типов:

1) Проверочные упражнения для актуализации теоретических сведений;

2) Задачи для обучения понятиям, закрепления усвоения понятий и математических конструкций:

а) Аналитического характера – с варьированием существенных и несущественных признаков понятия;

б) Синтетического характера – на построение примеров и контрпримеров. Такие задачи часто даются на лекциях, в конце параграфов.

Поскольку задачи, служащие обучению математическим понятиям, конструкциям и идеям, имеют большое значение, отметим важнейшие

---

[27] Шохор-Троцкий, С. И. *Методика арифметики.* Для учителей средних учебных заведений. СПб, 1915.

принципы, которыми следует руководствоваться при подборе таких задач:

– варьирование (признаков понятия);

– разумная полнота (по возможности следует давать все возможные, по крайней мере наиболее типичные, вариации входящих в объем понятия объектов). Скажем, среди множеств следует рассмотреть конечные и бесконечные, числовые и нечисловые, среди групп – конечные и бесконечные, коммутативные и некоммутативные, мультипликативные, аддитивные, группы биекций, а также группы с другими операциями, и т. п. Это способствует верному построению понятия в процессе обучения;

– контраст: обязательно необходимо приводить контрпримеры объектов, входящих в объем более широкого понятия, но не входящих в объем рассматриваемого (на важность этого принципа обращал внимание А. Пуанкаре[28] , говоря о математических определениях);

– включение понятия в новые связи;

– принцип сквозных задач.

3) Задачи на доказательство.

4) Нестандартные задачи.

5) Задачи на выполнение алгоритмов – там, где это уместно.

6) Задачи прикладного характера. Здесь особенно полезны задачи на применение знаний в будущей деятельности обучаемых – в школьном преподавании. Понятно, что задачи прикладного характера не вызывают сомнения в целесообразности их решения, служат мотивации учения.

7) Задачи занимательного характера.

8) Проверочные задачи для тестов (контрольных работ, контрольных срезов) и коллоквиумов.

В контрольные работы могут включаться задачи таких типов, которые не рассматривались на практических занятиях, а также нестандартные задачи.

Полезным как для углубления и упрочения знаний, так и для развития математического мышления студентов, по нашему опыту, оказывается самостоятельное составление ими компьютерных программ, реализующих алгоритмы, встречающиеся как в основном курсе, так и в дополнительных заданиях, например, при выполнении курсовых и дипломных работ. На наш взгляд, использование компьютеров для самостоятельного программирования студентами учебных задач вполне согласуется и с генетическим подходом в целом, и с принципом концентрированного обучения (*расчленение* трудностей; отметим и другие проявления этого принципа при использовании компьютеров: численное экспериментирование, наглядная визуализация и поиск закономерностей – таким образом,

---

[28] Пуанкаре, А. Наука и метод. // Пуанкаре, А. *О науке.* М.: Наука, 1990, с. 467.

компьютеры позволяют осуществлять различные способы передачи информации – действенный и наглядно-образный).

В § 2 «Методические особенности преподавания специальных курсов «Множества. Комбинаторика. Графы» и «Элементы прикладной алгебры» показано, что на спецкурсах подобного рода в полной мере удается реализовать идеи профессиональной направленности и интегративности, чему способствует последовательная реализация генетического подхода и концентрированного обучения.

В завершающем главу § 3 описана экспериментальная основа исследования.

Экспериментальная работа проводилась в несколько этапов.

1-й этап (1982-1986). В этот период автором изучались возможности компьютеризации учебного процесса, под его руководством создавались обучающие и контролирующие программы по элементам линейной алгебры и теории чисел, выполнялись курсовые и дипломные работы по алгебре и теории чисел с использованием вычислительной техники.

Были констатированы низкие результаты обучения математическим дисциплинам студентов дневного и заочного отделений физико-математического факультета и выявлены серьезные противоречия в организации учебного процесса по математическим дисциплинам в педагогических вузах.

2-й этап (1986-1993). Автором была разработана и внедрена новая (рабочая) программа по алгебре и теории чисел для студентов математических специальностей Башкирского и Набережночелнинского педагогических институтов, программы государственных экзаменов для дневного и заочного отделений, программы новых специальных курсов. Наибольшим изменениям подверглась программа по алгебре и теории чисел. В программе реализовывались идеи генетического подхода. В 1988 году автором создано методическое пособие «Вводные разделы алгебры и теории чисел», до настоящего времени используемое в учебном процессе Башкирского и Набережночелнинского педагогических институтов.

Осуществлялись наблюдения за ходом обучения студентов, их анкетирование, срезы остаточных знаний, коллоквиумы и беседы. Анализировались результаты курсовых и государственных экзаменов, выполнения студентами контрольных работ, а также за научно-исследовательской работой студентов.

Наблюдения показали наличие существенных положительных изменений в процессе обучения.

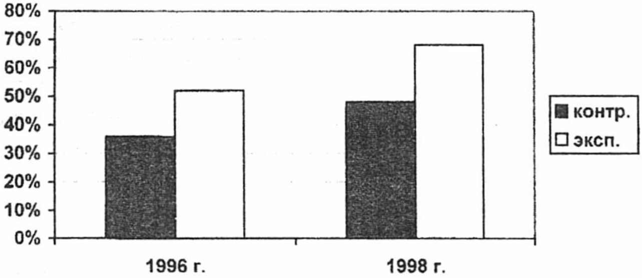
3-й этап (1993-2000). На этом этапе осуществлялись обучающие эксперименты на математическом факультете Набережночелнинского госпединститута по программам, усовершенствованным и уточненным автором с учетом результатов экспериментов на предыдущем этапе. В эти годы автор руководил переработкой учебного плана и программ по всем преподаваемым кафедрой дисциплинам математического и методического циклов в соответствии с новым Государственным образовательным стандартом высшей школы. Были также уточнены программы специальных курсов, тематика дипломных и курсовых работ по алгебре и теории чисел, в том числе с использованием информационных технологий, организована работа студенческой проблемной группы «Алгоритмы алгебры и теории чисел». В 1999 году было издано учебное пособие по курсу алгебры и теории чисел для студентов первого курса. Кроме того, на основе части материала как курса «Алгебра и теория чисел», так и специальных курсов был разработан специальный курс для учащихся старших классов средней школы № 26 с математическим уклоном г. Набережные Челны, который читался в 1997 и 1998 году и сопровождался занятиями по решению задач повышенной трудности. Посещавшие специальный курс учащиеся показали высокие результаты на различных математических соревнованиях (городские и республиканские математические олимпиады, математические бои с командами других школ и городов), в том числе за рубежом (олимпиада «Интеллектуальный марафон»). Это говорит о том, что предложенная методика полезна и в обучении школьников и, следовательно, обучение студентов с применением такой методики может существенно помочь в формировании методических взглядов и навыков будущих учителей.

В 1995-1999 годах обучение алгебре и теории чисел велось на каждом курсе параллельно на двух потоках: в одной группе – по традиционной методике и в другой – по экспериментальной. Несмотря на значительно более низкий стартовый уровень подготовленности в экспериментальных группах, к концу изучения курса алгебры и теории чисел студенты этих групп демонстрировали, по усредненному показателю, владение предметом по крайней мере не худшее, чем студенты контрольных групп.

Кроме того, в экспериментальных группах была выше посещаемость, возрос интерес к изучению курса алгебры и теории чисел. Это свидетельствовало о целесообразности использования предлагаемых автором подходов и методических принципов.

Наконец, большая доля студентов, изучивших курс алгебры и теории чисел по предлагаемой методике, выбирает специальные курсы по алгебре, а также дипломные работы по алгебраической и теоретико-числовой тематике, которые защищаются, как правило, с оценкой «отлично». Это говорит о том, что обучение по предлагаемой методике способствует также развитию творческих способностей студентов.

На протяжении всего срока изучения курса алгебры в контрольной и экспериментальной группах 1-2 раза в семестр проводились коллоквиумы, на которых проверялась степень владения основными понятиями курса с помощью специально подобранных вопросов и заданий. Эксперимент показал улучшение динамики результатов обучения. Например, нижеследующая диаграмма иллюстрирует результаты таких коллоквиумов по теории групп (указана доля верно выполнивших не менее 70% заданий):



В этих же группах в 1995 и1998 годах проведен опрос с целью выявления убеждений, касающихся обучения математике, с помощью анкеты, содержавшей 29 вопросов. Если в начале обучения студенты обеих групп выражали приблизительно одинаковые взгляды на обучение математике с преобладанием приверженности догматическому обучению, то в 1998 году студенты из экспериментальной группы отдали существенно большее предпочтение, чем студенты контрольной группы, обучению на высоком уровне трудности и развивающему обучению, и существенно меньшее предпочтение, чем студенты контрольной группы, догматическому типу обучения.

Заключение.

1. В настоящем исследовании теоретически разработана концепция генетического подхода к обучению математическим дисциплинам в педагогических вузах.
2. На основе изучения психолого-педагогических и методико-математических аспектов, трудов ведущих отечественных и зарубежных исследователей математического образования и педагогической психологии, а также анализа опыта многих поколений выдающихся практиков-педагогов, установлено, что целесообразно разрабатывать педвузовские математические курсы, строить их содержание, последовательность изучения, методику обучения им с помощью метода и логики развития самой науки и процессов познания, в соответствии с естественными путями происхождения и применения математического знания, руководствуясь *принципом генетического подхода к методике обучения предмету*.
3. В обучении вузовским математическим дисциплинам исторический аспект генетического подхода не всегда применим в силу крайней сложности исторического хода становлении таких сложнейших математических теорий, как, например, абстрактная алгебра. Поэтому не менее важ-

ное значение приобретают (взаимосвязанные) логические и психологические аспекты генетического подхода.

4. Логический анализ содержания учебного материала, осуществляемый с позиций диалектической логики, также помогает прояснить происхождение математических теорий. Важнейший аспект логической организации учебного материала заключается в том, чтобы организовать материал таким образом, чтобы выявить необходимость построения и развития тех или иных понятий и идей. Надо располагать материал так, чтобы возникали проблемные ситуации или задачи, оптимальным решением которых служили бы понятия или идеи, которые предстоит изучить. Для этого необходим анализ проблем познания, решением которых служат рассматриваемые понятия и идеи. В работе построены примеры проблемных ситуаций для введения понятий и примеры логических структур важных элементов теории групп, установлена чрезвычайная сложность и разветвленность этих логических структур.

5. Главная трудность исследования учебной деятельности в процессе изучения математических дисциплин в высшей педагогической школе (и в университетах) заключается в многоступенчатости абстракций. В добавление к известным системам уровней мышления при обучении алгебре (например, 5 уровней по А. А. Столяру), в настоящей работе, на основании развития алгебры как науки в последние десятилетия, выделен еще один высший, 6-й уровень алгебраического мышления – *уровень алгебраических категорий,* на котором рассматриваются классы алгебраических систем вместе с гомоморфизмами – многообразия универсальных алгебр, категории. В исследовании описаны принципы построения упражнений для обучения абстрактным понятиям.

6. В настоящем исследовании предложен принцип концентрированного обучения математической дисциплине и раскрыто его содержание применительно к преподаванию математики в высшей педагогической школе. Под концентрированным обучением понимается целый комплекс приемов, направленных на достижение максимально концентрированного воздействия на обучаемых. Принцип концентрированного обучения состоит в сочетании требований *подготовки* и, в частности, *предвосхищения, основательности, повторения* на разных уровнях, *совмещения функций*, *варьирования*, *контраста*, *воздействия на различные каналы восприятия* материала студентами.

7. В исследовании разработана система средств педагогического воздействия на студентов в процессе обучения математическим дисциплинам. Эти средства можно использовать как в устном преподавании или организации самостоятельной и научно-исследовательской работы студентов, так и в создании учебной литературы. Средства эти тесно связаны с эмоциональной стороной обучения, со средствами эстетического воздействия. Рассматриваются средства воздействия, связанные с компози-

цией математических курсов, с отбором и расположением материала, с различными способами получения обучаемым информации, с элементами языкового и эмоционального стиля преподавания.

8. В генетическом подходе важна роль установления связей учебного материала с внематематическим, в том числе и общекультурным содержанием. Должен постоянно поддерживаться интерес студентов к предмету. Особенно важно показывать неожиданные приложения математических понятий и результатов в новых областях, в том числе в гуманитарных науках, в искусстве.

9. В исследовании детально рассматривается построение программы и методика обучения отдельным разделам педвузовского курса алгебры на основе генетического подхода. Показано, как генетический подход применяется в обучении центральным понятиям и идеям математического курса. Разработаны, экспериментально проверены и внедрены программа, учебные и учебно-методические пособия и другие материалы для изучения математических дисциплин на основе предлагаемой концепции.

10. В работе рассмотрена организация лекций, практических занятий и упражнений, самостоятельной и научно-исследовательской работы студентов в различных формах, в том числе с использованием информационных технологий, а также методика преподавания интегративных спецкурсов, разработанных на основе концепции генетического подхода, проверенных на опыте и внедренных в практику.

11. В исследовании установлено, что применение генетического подхода к обучению математическим дисциплинам не только помогает углублению математических знаний, развитию творческих способностей и повышению интереса к изучаемым дисциплинам, но и способствует профессионально-педагогической направленности обучения математике в высшей педагогической школе, помогает формированию современных методических убеждений будущих учителей.

12. Полученные результаты открывают возможности дальнейшей исследовательской работы с целью расширения сферы приложения предлагаемой концепции, разработки путей ее реализации в других дисциплинах математического цикла, а также иных естественнонаучных циклов, в педагогических вузах и, более того, также и в вузах другого профиля. Кроме того, предлагаемые подходы могут найти применение и в разработке методических вопросов преподавания школьной математики.

Содержание диссертации отражено в 52 публикациях, основными из которых являются следующие:

Монографии, учебные пособия

1. *Теория и практика преподавания математических дисциплин в педагогических институтах.* Уфа: «Магрифат», 1999, 107 с.
2. *Алгебра и теория чисел.* Учебное пособие для студентов-математиков 1 курса (на татарском языке). Набережные Челны: Изд-во Камского политехнического института, 1999, 110 с.

Статьи, тезисы, учебно-методические пособия

3. *Вводные разделы алгебры и теории чисел* (методические указания для студентов-математиков 1 курса). Уфа: Башгоспединститут, 1988, 47 с.
4. Занимательно об индукции // Учитель Башкирии, 1989, №7, с. 45-47.
5. Algorithms of algebra and number theory // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1993.* Hildesheim: Franzbecker, 1993, S. 311-314.
6. Undergraduate Mathematics Education: Soviet Studies // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1994.* Hildesheim: Franzbecker, 1994, S. 315-317.
7. Soviet studies on teaching of university mathematics // *Symposia Gaussiana. Conf. A* . Berlin —New York: de Gruyter&Co., 1995, pp. 97-99.
8. Making mathematics interesting // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1995.* Hildesheim: Franzbecker, 1995, S. 404-407.
9. Pupils' views of mathematics teaching in Finland and Tatarstan // *NOMAD (Nordic Studies in Mathematics Education) v.4,* No. 4, 1996, pp. 31-59 (в соавт., авторское участие 50 %).
10. Some observations concerning pupils' views on mathematics teaching in Finland and Tatarstan (Russia) // *Current State of Research on Mathematics Beliefs III.* Helsinki, 1996, pp. 70-78 (в соавт., авторское участие 50 %).
11. Common sense in mathematics education and the renewal of public consciousness // *Mathematics (education) and common sense.* Proceedings of the 47-th CIEAEM meeting.TU Berlin, 1996, pp. 113-118.
12. Pupils' conceptions of mathematics teaching in Tatarstan // *Opettajankoulutuksen uudet haastet.* Helsinki, 1996, pp. 119-127.
13. New trends in mathematics education: implications for teacher education. // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1996.* Hildesheim: Franzbecker, 1996, S. 369-372.
14. О гуманитарном потенциале математической подготовки учителей в педвузах // *Гуманитарный потенциал математического образования в школе и педвузе.* Тезисы докладов 15 Всероссийского семинара преподавателей математики педвузов СПб., 1996, с. 70-71.
15. Math education as art criticism // *8-th international Congress on mathematics education,* Seville, July 14-19, 1996. Short Presentations. Sevilla, 1996, p. 97.
16. Элементы компьютерной алгебры в НИРС математического факультета // *Проблемы физико-математического образования в педвузах России на современном этапе.* Материалы 2 Уральской региональной научно-практической конференции. Уфа, Ч.2, 1997, с. 100-101.
17. Подготовка учителей математики в контексте развивающего обучения // *Математика в вузе и школе.* Тезисы 16 Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педвузов России. Новгород,1997, с. 99.
18. New trends in Russian Mathematics Education: Implications for teacher education // *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education.* Lahti, v.1, 1997, p. 292.
19. Mathematics education as art criticism // *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline.* Proceedings of the WG 25 at ICME 8 in Sevilla (Spain). Modena (Italy): University of Modena, 1997, pp. 71-76.
20. Prospective teachers' views on mathematics teaching in Tatarstan // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1997.* Hildesheim: Franzbecker, 1997, S. 431-434.
21. О некоторых недооцененных принципах преподавания математики в высшей школе // *Личностно-ориентрированный подход при обучении математике (содержательный и процессуальный аспекты).* Тезисы докладов 51-х Герценовских чтений. СПб, "Образование",1998,с.39-40.

22. Uber einige unterschatzte Prinzipien des Mathematikunterrichts im Grundstudium // *Beitraege zum Mathematikunterricht* 1998. Hildesheim: Franzbecker, 1998, S. 527-532.
23. *Общие понятия математики.* Методические рекомендации для студентов 1 курса ОЗО факультета ПиМНО. Набережные Челны: НГПИ, 1998, 36 с. (в соавт., авторское участие 50%).
24. О некоторых принципах преподавания математики в педагогических институтах и университетах // *Математическое обр-е на пороге XXI века.* Тезисы докл. межд. конф. Самара, 1999, с. 195.
25. Mathematical fights as the way of fostering mathematical talents // *Creativity and mathematics education.* Proceedings of the International Conference. Muenster, 1999, pp. 150-153.
26. Some under-estimated principles of teaching undergraduate mathematics // *Relationships between classroom practice and research in mathematics education.* Proceedings of CIEAEM 50. Neuchatel, 1999, pp. 353-358.
27. On some under-estimated principles of teaching undergraduate mathematics // *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 3.* Haifa, Israel: Technion, 1999, pp. 153-160.
28. Современные тенденции в зарубежном математическом образовании // *Содержание и методы обучения математике в школе и вузе на пороге столетий.* Тезисы докладов XVIII Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педвузов России. Брянск, 1999, с. 23-24.
29. Surprise and humor in teaching mathematics at universities and pedagogical institutes // *Beitraege zum Mathematikunterricht 1999.* Hildesheim: Franzbecker, 1999, S. 437-440.
30. Pupils' views of mathematics teaching in Tatarstan// *Beitraege zum Mathematikunterricht 2000.* Hildesheim: Franzbecker, 2000, S. 544-547.
31. Организация научно-исследовательской и учебно-исследовательской работы студентов // *Наука в системе высшего педагогического образования.* Тезисы докладов межвузовской научно-методической конференции. Набережные Челны: Изд-во "Камаз", 2000, с. 7-9.
32. О некоторых принципах преподавания математики в педагогических институтах // *Научные труды Московского педагогического государственного университета.* Серия: Естественные науки. М.: Прометей, 2000, с. 27-29.
33. Pupils' views of mathematics teachimg in Tatarstan// *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 1.* Hiroshima, Japan: Hiroshima University, 2000, p. 214.
34. Some theoretical problems of the development of mathematical thinking// *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 3.* Hiroshima, Japan: Hiroshima University, 2000, p. 17-24 (в соавт., авторское участие 50%).
35. Modern state and changes in mathematics teacher training in Russian Federation//*9-th international Congress on mathematics education, Tokyo/Makuhari, Japan. Short Presentations,* Tokyo, 2000, p. 170 (в соавт., авторское участие 50%).
36. The genetic principle in teaching university mathematics//*9-th international Congress on mathematics education, Tokyo/Makuhari, Japan. Short Presentations,* Tokyo, 2000, p. 148.

28

Подп. к печ. 27.09.2000   Объем 2,25 п.л.   Зак. 459   Тир. 100
Типография МПГУ

22673