

513 (077)

Б-241

На правах рукописи

Баранова Лариса Николаевна

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ
В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ**

13.00.02 – теория и методика обучения математике

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Орел – 2000

Работа выполнена в Орловском государственном университете

Научный руководитель: заслуженный учитель РФ,
академик РАО,
доктор педагогических наук,
профессор
Колягин Ю.М.

СКС

Официальные оппоненты: чл.-корр. РАО,
доктор педагогических наук,
профессор
Саранцев Г.И.

кандидат педагогических наук,
доцент
Авдеева Т.К.

09-02776

Ведущая организация: Московский государственный открытый
педагогический университет
им. М.А. Шолохова

Защита состоится " 22 " декабря 2000 г. в 12⁰⁰ часов на
заседании диссертационного совета К 113.26.04. по защите
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук в
Орловском государственном университете по адресу:
302015, г. Орел, ул. Комсомольская, 95.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Орловского
государственного университета.

Автореферат подготовлен ноябрь 2000 года.

Ученый секретарь
диссертационного

В.Д. Селютин Селютин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Традиционно, в отечественной средней школе решается триединая задача обучения, воспитания и развития школьников. В системе математического образования решение этой задачи, как известно, означает передачу учащимся определенного объема математических знаний, обучение их математическим умениям и навыкам, приемам и методам, формирование и развитие мышления, математической речи учащихся, воспитание устойчивого интереса к изучению математики, нравственных и эстетических качеств личности, а в целом – математической культуры учащихся.

Объективно, одним из средств, позволяющих достигнуть высокого уровня математической подготовки учащихся, является их деятельность по решению математических задач, в особенности, геометрических задач на построение. В самом деле, история преподавания геометрии в отечественной средней школе выявила особую дидактическую значимость геометрических задач на построение. Геометрические построения являются неотъемлемой частью элементарной геометрии, органически сочетаясь с ее систематическим курсом. Конструктивные геометрические задачи составляют одну из содержательных линий школьного курса геометрии, отличаются широкими возможностями выбора методов их решения, разнообразными приложениями в практической деятельности, богатыми межпредметными и внутрипредметными связями. Более того, традиционная методика решения этих задач в школе предусматривает четкое выделение таких этапов решения как анализ (поиск плана решения), построение, доказательство и исследование. Таким образом, геометрические задачи на построение объединяют в себе и задачи на доказательство и проблемные задачи; иногда они даже включают в себя и задачи на вычисление.

Вопросам постановки обучения решению геометрических задач на построение посвящены работы многих видных ученых-методистов и математиков, среди которых И.И. Александров, Ж. Адамар, И. Ганчев, Н.А. Извольский, Н.Н. Никитин, Г.М. Олифер, Д.И. Перепелкин, Г.И. Саранцев, А.Д., Семушин, А.А. Стражевский, А.И. Фетисов, А. Фуше, Н.Ф. Четверухин, С.И. Шохор-Троцкий, и др.

Геометрические задачи на построение играют важную роль в формировании и развитии мышления школьников, его логического, пространственного, интуитивного компонентов, в формировании навыков и умений геометрических построений, графической культуры школьников. Это подтверждается рядом фундаментальных исследований в области педагогической психологии, прежде всего исследованиями Б.Г. Ананьева, А.Д. Ботвинникова, Г.А. Владимирского, В.И. Зыковой, Е.Н. Кабановой-Меллер, В.А. Крутецкого, Б.Ф. Ломова, С.Л. Рубинштейна, Л.М. Фридмана, И.С. Якиманской, и др.

Теория и методика обучения решению математических задач (в том числе конструктивных геометрических задач) рассмотрены в работах М.И. Зайкина, Г.Д. Глейзера, В.А. Гусева, Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, Г.Л. Луканкина, О.В. Мантурова, И.М. Смирновой, А.А. Столяра, И.Ф. Шарыгина и др.

Проблемам постановки и обучения учащихся геометрическим построениям посвящен целый ряд диссертационных исследований, большая часть из которых относится

к 50-60 гг. XX века. Таковы, например, исследования А.А. Мазаника, Г.Г. Масловой, Г.П. Сенникова, И.Ф. Тесленко и др.

Изучение и детальный анализ математической, методической, дидактической и учебной литературы позволили определить круг тех вопросов и проблем, которые нашли решение в отечественной методике обучения школьников решению конструктивных геометрических задач в основной школе. К ним относятся: содержание конструктивного материала в школьном курсе геометрии, его распределение в пределах этого курса, методика ознакомления учащихся со схемой решения геометрических задач на построение и проведения ее каждого этапа, методика обучения учащихся отдельным методам решения конструктивных геометрических задач. Анализ программ и учебников по геометрии показал, что задачам на построение в курсе геометрии отечественной школы вплоть до 60-х гг. нашего столетия уделялось значительное внимание, а в современном курсе математики основной школы внимание к ним существенно снизилось. Все меньше места находится таким задачам на страницах школьных учебников геометрии, да и в школьной программе по математике геометрическим построениям отводится неоправданно малое количество часов; их изучение становится эпизодическим при том, что роль таких задач в формировании пространственного мышления и графической культуры учащихся является общепризнанной и подтверждена фундаментальными исследованиями в области психологии и методики обучения математике. Таким образом, до сих пор не решена проблема представления конструктивных задач как органической части в курсе геометрии современной школы. Выявленное противоречие между большой психолого-педагогической значимостью конструктивных геометрических задач с точки зрения их содержания и особенностей процесса их решения, с одной стороны, и недостаточным вниманием к ним в современном школьном обучении геометрии, - с другой, определяет актуальность проблемы нашего диссертационного исследования.

Проблема диссертационного исследования заключается в выявлении возможностей усиления конструктивной линии в современном курсе геометрии основной школы.

Цель исследования состоит в совершенствовании и дальнейшем развитии методики обучения школьников решению задач на построение, усиливающей конструктивную линию в обучении геометрии в современной школе.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии в основной школе, предметом исследования – методика обучения решению геометрических задач на построение.

Гипотеза исследования: целенаправленное и целесообразное усиление конструктивной линии в современном курсе геометрии основной школы позволит повысить и теоретический, и практический уровень обучения геометрии.

Для решения выявленной проблемы, достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы были определены следующие основные задачи исследования:

1) Проанализировать состояние проблемы диссертационного исследования на основе изучения и обобщения психолого – педагогической, методической, учебной литературы, государственных документов по вопросам среднего образования.

2) Выявить роль и место геометрических задач на построение в школьном обучении, а также психолого – дидактические особенности процесса их решения.

3) Проследить эволюцию обучения решению геометрических задач на построение в отечественной средней школе, а также – в некоторых зарубежных школах.

4) Выявить типологию конструктивных геометрических задач, наиболее приемлемую для обучения геометрии в современной основной школе.

5) Разработать методическую систему обучения геометрии, усиливающую конструктивную линию обучения и экспериментально проверить эффективность разработанной методики.

Методологическую основу исследования составили основные положения диалектики, теории познания, логики науки, системный подход к данной проблеме.

Теоретической основой исследования явились труды известных ученых – математиков и методистов, фундаментальные исследования в области психологии, основные положения и принципы теории и методики обучения математике в школе.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**:

- 1) Теоретические (анализ математической, психолого – педагогической, методической литературы по теме диссертационного исследования).
- 2) Общелогические (историко – логический анализ состояния исследуемой проблемы, логику – дидактический анализ действующих программ и учебников по геометрии).
- 3) Эмпирические (педагогические наблюдения, сравнение и обобщение педагогического опыта, беседы с учителями и др.)
- 4) Экспериментально – статистические (педагогический эксперимент, статистическая обработка его результатов и их анализ).

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечена использованием многолетнего опыта преподавания геометрии в отечественной и зарубежной школе, достижений психолого-педагогических наук, теории и методики обучения математике, а также – опытно-экспериментальной работой, применением разнообразных методов исследования, адекватных поставленным задачам, подтверждением выдвинутой гипотезы.

Научная новизна исследования состоит в разработке оригинальной методической системы обучения геометрии применительно к действующим учебникам для основной школы, позволяющей, не ломая традиционной методики обучения, усилить конструктивную линию курса и тем самым обеспечить более качественную геометрическую подготовку школьников.

Теоретическая значимость исследования состоит в разработке принципов построения методической системы геометрических задач (включаящей их типологию), позволяющей обеспечить сознательное усвоение теоретического материала школьниками,

формирование практически важных конструктивных геометрических навыков, развитие их пространственное мышление, повысить интерес к изучению геометрии.

Практическая значимость исследования заключается в возможности существенного совершенствования системы геометрических задач в школьных учебниках по планиметрии, в усилении прикладной и практической направленности обучения геометрии в школе, а также – в возможности успешного использования его результатов в практике работы школ и подготовке будущих учителей математики в педагогических вузах.

Апробация результатов исследования проводилась в виде докладов и выступлений на заседаниях кафедры геометрии и методики преподавания математики ОГУ, на заседаниях научно-методического семинара физико-математического факультета ОГУ, научно-практических конференциях по итогам НИР ОГУ (1998-2000 г.), Всероссийской конференции "Методическое обеспечение сельской школы: теория, практика, эксперимент" (Орел, 1999 г.), межрегиональном научно-практическом семинаре "Сельская школа как региональный образовательно-культурный центр" (Арзамас, 2000 г.).

На защиту выносятся:

1. Система принципов построения методики обучения решению геометрических задач на построение.
2. Методическая система обучения решению задач на построение применительно к действующим учебникам, обеспечивающая более качественную геометрическую подготовку школьников.

Структура диссертации оп[р]делена логикой и последовательностью поставленных задач. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследования, определены проблема научного поиска, цель, объект и предмет исследования, сформулированы его гипотеза и задачи, показаны новизна, теоретическая и практическая значимость работы, раскрыты этапы и методы исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту.

В первой главе "Роль и место конструктивных геометрических задач в школьном курсе математики" рассматриваются теоретические вопросы использования планиметрических задач на построение как средства обучения математике в основной школе. представлена эволюция постановки таких задач в отечественной и некоторых зарубежных школах.

Анализ педагогической, психологической, методической и учебной литературы показал, что одним из важнейших компонентов в деятельности учащегося в процессе обучения математике является решение задач. Именно при решении математических задач учащиеся сознательно и прочно овладевают системой математических знаний, умений и навыков, приемами эффективной умственной деятельности, направленной на развитие их мышления, воображения, памяти, формирование мировоззрения, воспитывают эстетические качества личности, творческую активность. Не составляют исключения и

геометрические задачи на построение. Их особое значение в методике обучения геометрии общепризнано.

Как известно, геометрическая задача на построение представляет такую задачу, в которой требуется по каким-либо данным найти некоторые геометрические элементы (точку, прямую, окружность, треугольник и т.д.), удовлетворяющие тем или иным условиям с помощью указанного набора чертежных инструментов. Зачастую таковыми являются циркуль и линейка, в отдельных случаях допустимый инструментарий может быть ограничен или же, наоборот, расширен.

Задачи на построение как раздел элементарной геометрии имеют своеобразные отличия от других математических задач. Во-первых, не всякая задача, решенная математически, является задачей, решенной "конструктивно"; не всякая точка, прямая или какая-нибудь другая геометрическая фигура, математически вполне определенная, может быть "построена". Во-вторых, сама постановка конструктивных геометрических задач, возможность их решения, существенно зависит от набора чертежных инструментов, которые могут быть использованы для выполнения построений. В связи с этим, в работе мы касаемся вопросов чертежного инструментария (рассматриваем аксиомы инструментов построения), обращаемся к отдельным видам конструктивных задач (неопределенным и неразрешимым конструктивным задачам, конструктивным метрическим задачам, конструктивным задачам положения), а также рассматриваем структуру решения геометрической задачи на построение.

Конструктивные геометрические задачи отличает четкая структура их решения. Традиционно отечественная методика предлагает проводить ход их решения, а также и запись решения в четыре этапа: 1) анализ, 2) построение, 3) доказательство, 4) исследование. Уже одно это говорит о том, что конструктивные геометрические задачи аккумулируют в себе обучение поисковой и конструктивной деятельности, приемам логического мышления, формирование исследовательских умений и навыков у учащихся. Рассматривая структуру решения конструктивной геометрической задачи, следует отметить те частные задачи, которые решаются на каждом этапе, особенности каждого этапа в практике школьного обучения геометрии. При этом указанная четырехэтапная схема обладает удобством и дидактической эффективностью в обучении учащихся решению не только конструктивных геометрических задач, но может быть с успехом применена полностью или частично и ко многим другим учебным математическим задачам (и не только математическим). Более того, геометрическая задача на построение сочетает в себе как собственно конструктивную задачу, так и задачу на доказательство, исследовательскую задачу, как бы объединяя традиционную типологию школьных геометрических задач.

Выявление и рассмотрение функций и психолого-дидактических особенностей конструктивных геометрических задач, а также процесса их решения опирались на фундаментальные исследования С.Л. Рубинштейна в области психологии мышления; на работы В.И. Зыковой, которая исследовала психологические особенности формирования системы математических понятий и умений оперировать ими, а также соотношение тео-

ретических знаний, полученных на уроках геометрии, с формирующимися у учащихся практическими умениями; на исследования И.С. Якиманской по психологии развития пространственных представлений, воображения, мышления школьников; исследования В.А. Крутецкого по формированию математических способностей школьников; работы Б.Ф. Ломова, исследовавшего особенности формирования и развития графических знаний, умений и навыков школьников.

Любая учебная задача представляет собой форму контакта учащегося с проблемной ситуацией, которая, в свою очередь, является источником процесса мышления, а постановка и решение задачи подразумевают анализ условий и требований задачи через их соотнесение друг с другом. В этом плане конструктивные геометрические задачи отличает четкое выделение этапа анализа задачи, на котором учащийся выполняет поиск решения задачи и одновременно обучается поисковой деятельности. При этом он применяет логические операции анализа и синтеза, сравнение, обобщение, аналогию и др., то есть формируется его логическое мышление. Проиллюстрируем, как выполняется важнейшее звено мыслительного процесса – "анализ через синтез" (в формулировке С.Л. Рубинштейна) при решении геометрической задачи на построение.

Задача 1. Построить прямую, параллельную основанию данного треугольника, чтобы ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

Проследим ход рассуждений решающего задачу ученика, приводящий к отысканию самого решения задачи.

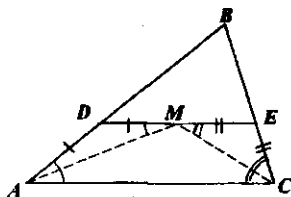


Рис. 1.

Считая, что искомая прямая DE ($DE \parallel AC$) построена (рис. 1) и выполняются все указанные в условии соотношения ($DE = AD + CE$), приходим к задаче отыскания точки M ($M \in DE$) такой, что $DM + ME = AD + EC$ или $AD = DM$, $CE = EM$. Отрезки AD и DM , например, являются сторонами равнобедренного треугольника ADM , тогда $\angle DAM = \angle DMA$.

Поскольку прямые DE и AC параллельны, то $\angle DMA = \angle MAC$ как внутренние накрест лежащие при этих параллельных и секущей AM . Тогда $\angle DAM = \angle MAC$ и AM является биссектрисой угла A данного треугольника.

Применив аналогичные рассуждения к треугольнику MEC , получим, что точка M может быть найдена как точка пересечения биссектрис двух углов данного треугольника, а искомая прямая проходит через точку M параллельно основанию AC данного треугольника ABC .

Таким образом, в процессе поиска решения данной задачи учащийся переосмысливает (мысленно реконструирует) геометрическую фигуру, одни и те же отрезки AM и CM включаются им каждый раз в новую систему связей, переосмысливаются в плане разных понятий: AM и CM – произвольные отрезки, AM и CM – основания равнобедренных треугольников ADM и MEC , AM и CM – секущие параллельных прямых DE и AC ,

AM и CM – биссектрисы углов A и C треугольника ABC . Такая деятельность по переосмысливанию одних и тех же фигур в плане различных понятий играет особую роль в формировании у учащихся системы понятий и в овладении ей. Усвоение же понятий в системе, установление между ними логических связей обеспечивает прочность и действенность знаний, способствует формированию диалектического мышления учащихся.

При решении геометрических задач на построение часто приходится прибегать к различным геометрическим преобразованиям для того, чтобы данные элементы искомой фигуры стали конструктивными (могли быть построены), или же в искомой фигуре выделяется какая-либо ее часть – другая фигура, для которой заданные элементы являются конструктивными и определяют ее существование. Последнее достигается путем различных перегруппировок элементов искомой фигуры с помощью приемов наложения, добавления, усечения, совмещения и т.п. То есть при решении любой конструктивной задачи выполняется целая серия умственных и фактических действий, направленных на преобразование искомой фигуры (исходного образа) одновременно и по положению ее на плоскости и по структуре, что является важнейшим условием формирования фундаментального умения свободно оперировать пространственными образами – того умения, которое лежит в основе развития пространственного мышления и объединяет различные виды учебной и трудовой деятельности.

Конструктивная геометрия отражает чертежно-графическую практику, в связи с этим решение задач на построение способствует формированию системы графических знаний, умений и навыков, что, в свою очередь, является важнейшим условием формирования и развития пространственного воображения и мышления школьников. Многие методисты-математики и психологи отмечают особую роль геометрических построений в развитии пространственного мышления школьников, их математической интуиции. Так, например, И.С. Якиманская, изучавшая структуру, условия формирования и развития пространственного мышления установила, что "...пространственное мышление учащихся формируется главным образом на графической, наглядной основе, в условиях оперирования образами по памяти в процессе решения учебных задач", что в полной мере относится, в первую очередь, к геометрическим задачам на построение.

Зачастую, в процессе решения геометрической задачи на построение требуется введение новых конструктивных элементов, выбор которых, с одной стороны, характеризуется определенной свободой, а с другой, – обусловлен данными и требованиями самой задачи. И здесь успех ученика в решении задачи во многом будет зависеть от его опыта и знаний в области решения конструктивных задач, от способности проводить аналитико-синтетическую деятельность, и немаловажную роль при этом играет математическая интуиция учащегося. Но сама догадка не рождается на пустом месте, "феномен, переживаемый субъектом как внезапное озарение... есть результат предшествующей длительной работы мысли", – правомерно отмечал В.А. Крутецкий, "за догадкой стоит ... анализ условий задачи", – писал С.Л. Рубинштейн.

Таким образом, геометрические задачи на построение являются одним из важнейших средств формирования и развития целого ряда компонентов структуры умствен-

ной деятельности школьников, которая формируется курсом геометрии, а именно логического, пространственного, интуитивного и конструктивного компонентов. Конструктивный компонент включает в себя: 1) умение осуществлять геометрические построения, 2) умение изображать фигуры (наглядные, проекционные), 3) владение конструктивным методом определений, 4) владение конструктивным методом доказательств. (За основу нами была принята модель структуры умственной деятельности, предложенная Г.Д. Глейзером).

Конструктивные геометрические задачи являются важнейшим средством эстетического воспитания школьников. Выполняя конструктивную деятельность по созданию геометрической фигуры (ее образа), учащиеся наблюдают форму создаваемого ими геометрического объекта, ее изменение в процессе этого создания (построения), открывая для себя отдельные свойства, например, симметрию, равенство и др. отдельных элементов конструируемой фигуры. Отдельные конструктивные задачи напрямую связаны с эстетикой формы, например, задача построения "золотого сечения" или построение правильных многоугольников и др. Кроме того, при решении конструктивной геометрической задачи, выполняя каждый его этап, учащиеся открывают для себя эстетику математического рассуждения, его последовательность, обоснованность, устанавливают общность приемов и методов решения таких задач, их взаимосвязь с другими математическими задачами, например, алгебраическими, красоту и внутреннее единство математики.

Конструктивные геометрические задачи составляют одну из содержательных линий курса геометрии в отечественной школе. Они являются важным средством создания у школьников конкретных геометрических представлений, поскольку помогают им переносить свое внимание со словесной формулировки геометрического предложения на реальные геометрические соотношения, которые за этими предложениями скрываются. Так, например, построение окружности, описанной около треугольника, позволит учащимся лучше усвоить теорему о положении центра такой окружности или, например, задача проведения через точку внутри окружности такой ее хорды, которая делилась бы ею пополам, позволит ученикам усвоить тот факт, что радиус окружности, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам и др.

Конструктивные геометрические задачи охватывают построение практически всех планиметрических фигур, изучаемых в курсе геометрии основной школы, отличаются разнообразием методов их решения и связаны практически со всеми разделами курса геометрии. что позволяет использовать их как средство повторения, обобщения и систематизации изученного геометрического материала. Задачи на построение обладают той дидактической ценностью, что могут предлагаться учащимся в учебном процессе систематически. Отдельные конструктивные задачи могут быть рассмотрены неоднократно, при изучении различных тем курса геометрии. Геометрические задачи на построение дают широкие возможности иллюстрировать систематически на большом числе примеров понятие постоянных и переменных величин. В особенности это относится к конструктивным задачам, предлагаемым в общем виде, когда длины сторон, величины

углов, расстояния между параллельными прямыми и т.п. могут варьироваться. Особенно ярко это проявляется на этапе исследования полученного решения, когда требуется установить полноту найденного решения и исследовать особые (предельные) случаи. Например, при построении треугольника по трем сторонам в случае, если два выбранных в качестве сторон треугольника отрезка окажутся таковыми, что сумма их длин меньше длины третьего отрезка или равна ей, то треугольник существовать не будет, если больше – то он существует. Фактически любая задача на построение содержит в себе подзадачу на доказательство существования искомого геометрического объекта, то есть выполняет пропедевтическую функцию для изучения учащимися в будущем курса стереометрии, где большинство первых теорем являются теоремами существования и имеют конструктивное доказательство. Геометрические построения обучают конструктивному методу в геометрии. Эта особенность геометрических задач на построение позволяет использовать их в роли проблемных задач при рассмотрении нового материала, в частности, при введении новых геометрических фигур, рассмотрении их свойств. Приведем некоторые примеры таких задач.

Задача 2. Сформулируйте и докажите какой-нибудь признак равенства двух ромбов.

Задача 3. Дан равнобедренный треугольник с вершиной $A=90^\circ$. Постройте симметричные ему фигуры относительно сторон AB и AC . Каковы полученные фигуры? Какими свойствами они обладают? Рассмотрите случаи: $A=60^\circ$, $A=45^\circ$.

Задача 2 приводит к отысканию такой совокупности элементов ромба, которые являются конструктивными, причем построенный по ним ромб является единственным. Решение задачи 3 приводит к новым геометрическим фигурам, установлению их свойств, доказательство которых с привлечением идей геометрических преобразований оказывается более простым, нежели с использованием признаков равенства треугольников.

Среди конструктивных геометрических задач достаточно обширную группу составляют задачи с практическим содержанием, задачи прикладного характера, с занимательной и интересной фабулой. Это, например, задачи о делении фигур на равновеликие части, задачи на "перекраивание" фигур, задачи с недоступными точками и др. Геометрические задачи на построение отличают широкие межпредметные связи, особенно с курсами черчения и физики.

Итак, в процессе обучения геометрии можно выявить следующие методические функции конструктивных задач: 1) развитие логического мышления школьников; 2) развитие их пространственных представлений, пространственного воображения и мышления; 3) развитие математической интуиции; 4) формирование практических умений и навыков, связанных с использованием чертежных инструментов; 5) более глубокое усвоение теоретического материала, расширение теоретических знаний; 6) повторение, обобщение и систематизация знаний учащихся; 7) реализация проблемного обучения через задачи; 8) эстетическое воспитание школьников; 9) подготовка к математическому моделированию практических задач; 10) реализация межпредметных и внутрипредметных

связей. В работе эти функции детально описаны и проиллюстрированы конкретными примерами.

Для того, чтобы составить достаточно полное и объективное представление о предмете нашего исследования, мы рассмотрели эволюцию постановки конструктивных задач в школьных учебниках геометрии прошлого и настоящего.

Первое представление о числе конструктивных задач в учебниках геометрии, действующих в отечественной школе 20-го столетия, даст следующая диаграмма (рис. 2).

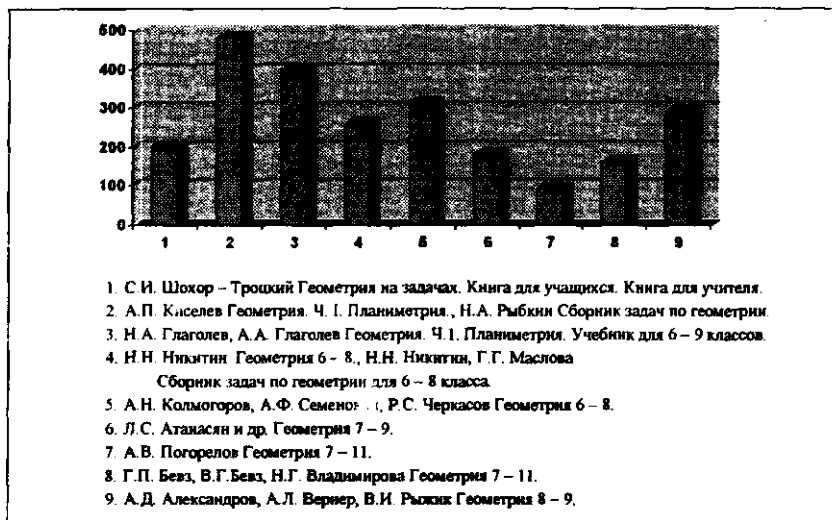


Рис. 2.

Историко-логический анализ постановки конструктивных геометрических задач в отечественных учебниках позволил нам выявить те особенности, которыми такая постановка характеризуется:

1) Задачи на построение в течение длительного времени занимают в курсе геометрии основной школы одно из ведущих мест. Во многом это объясняется тем, что курс геометрии в отечественной школе самостоятельный и дедуктивный, а конструктивные задачи облегчают его усвоение. В последние годы внимание к конструктивным задачам в практике обучения школьников геометрии существенно снижено; все меньше места находят таким задачам на страницах школьных учебников геометрии, программой по математике отводится малое количество часов на изучение геометрических построений. В условиях жесткой сетки часов изучение конструктивных геометрических задач в школе становится эпизодическим.

2) Традиционным для отечественной школы является систематический характер предъявления задач на построение в процессе изучения всего курса планиметрии.

3) Конструктивные планиметрические задачи охватывают построение всех изучаемых в основной школе фигур, от точки, множеств точек, отрезков и прямых до окружностей и различных многоугольников. В системе конструктивных планиметрических задач, рассматриваемых в отечественных учебных пособиях для основной школы, приоритет отдан элементарным геометрическим построениям, построению треугольников (общего и частных видов), в несколько меньшем объеме предлагаются задачи на построение параллелограммов и их частных видов, трапеций и окружности, а также построение геометрических мест. Наиболее распространенные типы таких задач отражены в таблицах приложений к работе.

4) Основными методами для решения задач на построение в основной школе являются метод геометрических мест и метод подобия, в несколько меньшем объеме предлагаются задачи, решаемые методами симметрии, вращения, параллельного переноса, алгебраическим методом. Такое преобразование плоскости как инверсия и соответственно метод инверсии рассматриваются только в учебных пособиях для классов с углубленным изучением математики. Заметим также, что традиционным является выделение "основных задач" на построение.

5) В большинстве рассмотренных школьных учебников эпизодически предлагаются задачи, решаемые ограниченными средствами или, наоборот, инструментарий расширен, а также задачи с недоступными точками, на разрезание и "перекраивание" фигур, конструктивные задачи практического содержания.

Естественный интерес представляет изучение опыта в сфере образования в других странах, и в первую очередь в странах с богатыми математическими и педагогическими традициями. Так, например, в школе Германии этим задачам присущ прикладной, практический характер; в немецких учебниках геометрии прослеживается тесная связь геометрии с черчением. В школе Японии, имеющей свою оригинальную, успешно функционирующую систему массового, не элитарного образования, в последние годы усиливается роль прикладного аспекта в преподавании математики, его связь с развитием мышления учащихся, в том числе за счет увеличения количества задач, связанных с построением геометрических фигур и действиями с ними. Одним из лидеров в этой области является Франция. Здесь следует особо подчеркнуть, что организация работы французской школы близка образовательной системе отечественной средней школы прежде всего тем, что из всех западных школ она является наиболее централизованной и стандартизированной (подчинена единым государственным программам и стандартам), а кроме того, она сопоставима отечественной школе по теоретическому уровню обучения. Поэтому, мы провели исследование проблемы на примере французской школы, рассмотрев постановку конструктивных задач во французской школе 60–70-х гг. так, как она была представлена в популярных французских учебниках Бреара, тем более что постановка геометрических задач на построение во французской школе 60 – 70-х гг. в плане объема, систематичности предъявления, в разнообразии типов предлагаемых задач намного превосходит современную их постановку в массовой отечественной школе. В работе дана общая характеристика учебников Бреара и проведен анализ задач на построение по сле-

дующим направлениям: 1) объем конструктивных задач и его соотношение с общим количеством задач, 2) содержание конструктивного материала, включая типологию конструктивных геометрических задач, 3) систематичность предъявления задач на построение и задач, связанных с ними, 4) сложность предлагаемых задач.

Основными результатами изучения опыта постановки конструктивных геометрических задач во французской школе явились следующие ее особенности: 1) систематичность предъявления таких задач, 2) неоднократное включение основных задач на построение с дальнейшим изменением и расширением содержания фабулы, формы их подачи, упор на отработку навыков элементарных геометрических построений, 3) рассмотрение построений достаточно широкого круга изучаемых в школьном курсе математики фигур, 4) более частое применение к решению задач метода геометрических мест, методов осевой и центральной симметрии, менее частое – методов подобия, параллельного переноса и алгебраического, 5) слабое представление конструктивных задач в теоретической части сравнительно с отечественной школой до 60-х гг. (примеров построений, анализа, исследования конструктивных задач очень мало и они далеко не всегда полны, не освещены в теоретическом материале учебника методы решения геометрических задач на построение, основной акцент сделан на систему задач, которая как раз и отражает разнообразие задач как по виду фигур, которые требуется построить, так и по методам их решения, набору применяемого инструментария), 6) эпизодическое представление задач с недоступными точками и расширением инструментария, 7) яркое представление линии задач с практическим содержанием, 8) наличие в системе упражнений комплексных задач, обладающих широкими дидактическими функциями. Многие из этих особенностей полезно учитывать при построении методики обучения геометрии в отечественной школе.

В построении системы конструктивных геометрических задач во французской школе реализуются следующие принципы: концентризма, систематичности, нарастания сложности, обучения через задачи, практической направленности.

Во второй главе "Методика обучения решению геометрических задач на построение" диссертационной работы определена дидактическая типология конструктивных геометрических задач, установлены основные принципы построения методики обучения решению геометрических задач на построение в курсе планиметрии, описана сама методика обучения решению конструктивных задач в процессе изучения курса планиметрии, определены межпредметные и внутрипредметные связи в процессе решения конструктивных задач (в частности, более подробно рассмотрены связи геометрических задач на построение с алгеброй, арифметикой, тригонометрией), описана опытно-экспериментальная работа по локальной экспериментальной проверке разработанной методической системы применения конструктивных задач в обучении геометрии в условиях современной массовой школы.

Логико – дидактический анализ содержания темы "Геометрические построения на плоскости" позволил определить дидактическую типологию конструктивных задач курса планиметрии. Здесь следует отметить два основных подхода, сложившихся в

школьном обучении решению геометрических задач на построение. Первый из них в основе своей имеет метод решения конструктивной геометрической задачи, а второй – тип искомой в ней фигуры. Каждая из приведенных типологий имеет свои позитивные и негативные стороны с точки зрения использования их в построении системы конструктивных геометрических задач в курсе планиметрии основной школы. На наш взгляд, наиболее приемлемой для школьного обучения геометрии является классификация задач, в основу которой положен тип фигуры, которую требуется построить по условию задачи, поскольку именно такая типология в большей степени отражает содержание школьного курса планиметрии в целом, его отдельных содержательных линий в их взаимосвязи с геометрическими построениями. Заметим, однако, что классификация конструктивных геометрических задач по методам их решения также может быть использована локально, при рассмотрении отдельных тем или разделов курса геометрии, например, при изучении геометрических преобразований, элементов аналитической геометрии.

В отечественных учебниках геометрии для основной школы рассматриваются следующие типы задач на построение: 1) основные задачи на построение; 2) задачи на построение треугольников; 3) задачи на построение четырехугольников (а) произвольного; б) трапеции; в) параллелограмма; г) ромба; д) прямоугольника; е) квадрата); 4) задачи на построение правильных многоугольников; 5) задачи на построение окружности и ее элементов (дуг, хорд, касательных, секущих); 6) задачи на построение геометрических мест; 7) задачи на построение прямых и отрезков, удовлетворяющих заданным условиям, отрезков по формулам; 8) задачи на построение равновеликих и равносторонних фигур; 9) задачи с недоступными точками; 10) задачи, решаемые ограниченными средствами.

Исходя из дидактических функций конструктивных геометрических задач, психологических особенностей процесса их решения, учитывая их роль и значимость в евклидовой геометрии, а также опыт и традиции их преподавания в отечественной школе и некоторых зарубежных школах, были выявлены следующие **основные принципы построения методики обучения решению таких задач в курсе планиметрии основной школы**: принцип целостности, принцип дедукции и индукции, принцип анализа и синтеза, принцип межпредметных и внутриспредметных связей, принцип прагматизма, принцип моделирования, принцип эволюционного развития.

Принцип целостности (возможной полноты) означает возможное более полное привлечение содержательной и процессуальной сторон конструктивных задач в процессе обучения геометрии в основной школе на доступном учащимся уровне. В работе мы показали его реализацию "по горизонтали", она затрагивает вопросы объема и типологии конструктивных геометрических задач, предлагаемых в основной школе с учетом их дидактических функций, а также рассмотрели реализацию этого принципа "по вертикали", которая означает по возможности более полное проведение всех этапов решения таких задач с учетом психологических особенностей самого процесса их решения. Полная реализация принципа целостности как "по горизонтали", так и по "вертикали" в настоящее время возможна только в школах и классах естественно-математического профиля, либо

в работе с наиболее математически подготовленными учащимися, например, на факультативных занятиях. В современной массовой школе, в условиях жесткой сетки часов можно говорить лишь о возможной полноте реализации принципа целостности.

Принцип дедукции и индукции в обучении учащихся конструктивным геометрическим задачам означает использование их как средства развития индуктивных и дедуктивных умений учащихся, как средства дедуктивно-индуктивного подхода к изучению курса планиметрии. С помощью конструктивных задач можно формировать у учащихся дедуктивные и индуктивные умения. Особенно ярко это проявляется в следующих случаях: 1) при обосновании с помощью геометрических построений тех или иных выводов и утверждений геометрической теории, выполненных чисто логическими средствами, 2) при доказательстве теорем существования, 3) при изучении экстремальных задач (тех задач, где требуется построить геометрическую фигуру, которая, например, имеет наибольший (наименьший) периметр, площадь и т.п.).

Принцип анализа и синтеза в процессе обучения решению конструктивных геометрических задач предполагает развитие аналитического и синтетического мышления учащихся в их взаимосвязи. И здесь особое значение имеет организация процесса поиска решения задачи подобным процессу исследования, творческого поиска в математике на уровне, доступном уровню мыслительной деятельности учащихся, а конструктивные геометрические задачи выступают одним из особенно удобных средств, в силу психологических особенностей процесса их решения.

Как уже отмечалось, конструктивные геометрические задачи отличает особая структура решения "анализ – построение – доказательство – исследование", которая сама представляется в виде формально-логической схемы рассуждений, применимой полностью или частично в явном или скрытом виде практически к любой математической задаче, и во всех тех случаях, когда возникающая проблема требует ее анализа, анализа тех условий, в которых решается задача, поиска путей решения, выбора оптимального из них и т.п. В работе, на конкретных примерах показана методика обучения такой деятельности в процессе решения геометрических задач на построение.

Принцип межпредметных и внутрпредметных связей в обучении учащихся геометрическим задачам на построение означает формирование у школьников целостного представления о внутреннем единстве математики и ее роли в других науках, в частности, о роли геометрических построений в чертежной практике, в физике, например, в геометрической оптике, об общих методах и приемах решения геометрических и алгебраических задач.

Реализация межпредметных связей курсов геометрии (в части задач на построение) и черчения предполагает решение общих задач обучения правильным и рациональным приемам работы с чертежными инструментами, способам элементарных геометрических построений, использование общих подходов к формированию графической культуры учащихся, освещение общих или тесно взаимосвязанных содержательных линий этих курсов. Геометрические построения находят свое применение и в физике, например, при изучении школьниками геометрической оптики, при рассмотрении некоторых

принципов работы оптических приборов. Взаимосвязь конструктивных задач с алгеброй, арифметикой, тригонометрией прослеживается в системе общих методов и приемов, применимых к их решению. Ее реализация позволяет приводить знания учащихся в систему, делая их осознанными, усиливая их прикладную направленность. Внутрпредметные связи конструктивных планиметрических задач с задачами стереометрии определяются использованием конструктивного метода (для доказательства существования геометрических объектов) и планиметрической теории для решения стереометрических задач.

Принципы прагматизма и моделирования в обучении учащихся геометрическим построениям означают их использование как средства усиления прикладной, практической направленности обучения геометрии; как средства изучения геометрии с модельной точки зрения, средства формирования у школьников умений и навыков математического моделирования практических задач.

Решая учебные задачи прикладного характера, задачи с практическим содержанием, учащиеся лучше понимают роль математических знаний в практической деятельности, сознательно усваивая математические факты. В соответствии с диалектическими закономерностями процесса познания, получаемые школьниками знания становятся осознанными и действенными, если осуществляется каждый этап процесса познания от восприятия и осмысления знаний до их закрепления и применения на практике. Для решения любой практической задачи с помощью математического аппарата необходимо найти для нее подходящую математическую модель, выполнить "перевод" задачи на язык математики. Такой деятельности по математическому моделированию практических задач можно научить учащихся, используя как средство геометрические задачи на построение. Кроме того, многие конструктивные геометрические задачи имеют вид текстовых задач, и при их решении широкое применение находят аналитические модели (например, уравнения или их системы).

Принцип эволюционного развития в построении целостной методической системы обучения решению конструктивных геометрических задач в основной школе означает обеспечение более качественной геометрической подготовки школьников, не ломая традиционной методики обучения.

Наибольшей эффективности в развитии мышления, повышении уровня теоретических знаний и практических навыков учащихся в системе конструктивных планиметрических задач можно достичь посредством реализации всех указанных принципов. Одним из оптимальных путей такой реализации является эволюционное изменение системы планиметрических задач в школьных учебниках геометрии.

Опытно – экспериментальная работа в рамках диссертационного исследования проводилась с 1996 по 2000 год. На этапе констатирующего эксперимента был выполнен анализ современных учебных программ по математике (и черчению), действующих в отечественной средней школе, выявлены тенденции постановки конструктивных геометрических задач в отечественной школе, проведены беседы с учителями по ряду проблем постановки и обучения геометрическим построениям в основной школе. В результате

констатирующего эксперимента было установлено, что система геометрических задач на построение в современных отечественных учебниках геометрии требует ее модификации, которая бы сблизила решение конструктивных задач с другими геометрическими задачами, с изложением теории, усилила межпредметные связи и прикладную, практическую направленность обучения геометрии.

На этапе *поискового эксперимента* был выявлен позитивный опыт преподавания конструктивных геометрических задач и опыт обучения геометрическим построениям в отечественной средней школе (на основе анализа конструктивного материала в действующих учебниках геометрии), была установлена дидактическая типология конструктивных геометрических задач, выявлены основные методические принципы, которые могли быть положены в основу разработки методической системы, направленной на существенное повышение теоретического и практического уровня обучения геометрии в школе. На этом этапе нами были проведены уроки и факультативные занятия, где с учащимися рассматривались отдельные конструктивные геометрические задачи. Такая работа позволила выявить доступность учащимся конструктивных геометрических задач, решаемых разными методами (геометрических мест, симметрии, подобия, параллельного переноса, алгебраическим), задач на построение треугольников, параллелограммов и их частных видов, окружностей, интерес школьников к решению задач с нестандартной фабулой, фабулой практического содержания, а также позитивное влияние расширения используемого инструментария на формирование практически важных геометрических умений и навыков учащихся.

Формирующий этап эксперимента имел целью локальную проверку разработанной методической системы в условиях современной массовой школы. Он осуществлялся на базе 7-х классов ряда школ г. Орла в 1998 – 2000 гг.

Предложенная нами методика обучения учащихся решению конструктивных геометрических задач в целом получила положительные отзывы принявших в экспериментальной работе учителей. Учащиеся, участвовавшие в обучающем эксперименте, также проявили интерес к отдельным группам задач, предлагавшихся в рамках нашей методической системы, в первую очередь, к задачам практической направленности, задачам с нестандартной, занимательной фабулой. Локальные результаты решения отдельных задач, проведенных проверочных работ определили возможность использования разработанной методической системы в практике обучения геометрии в основной школе с целью повышения его теоретического и практического уровня. Статистическая обработка результатов обучения в контрольной и экспериментальной группах показала эффективность избранной методики и подтвердила выдвинутую в диссертационном исследовании гипотезу.

В процессе теоретического и экспериментального исследования поставленной научной проблемы, в соответствии с целью и задачами диссертационной работы получены следующие результаты и выводы.

1. Анализ состояния проблемы исследования, выполненный на основе изучения и обобщения математической, психологической, дидактической, методической и учебной

литературы, показал, что задачам на построение уделялось серьезное внимание до 60-х гг. XX столетия. Начиная со второй половины XX столетия, внимание к таким задачам в школьном курсе геометрии существенно снижается, несмотря на то, что геометрические задачи на построение обладают большой психолого-педагогической значимостью в обучении школьников геометрии. В современной школе их постановка является неудовлетворительной. Не решена задача представления конструктивных задач как органической части в современном школьном курсе геометрии.

2. Геометрические задачи на построение играют важную роль в евклидовой геометрии, составляя один из разделов элементарной геометрии. Их решение тесно связано и во многом зависит от используемого набора чертежных инструментов. Конструктивные геометрические задачи отличает четкая четырехэтапная схема их решения и его записи (анализ – построение – доказательство – исследование), которая обладает удобством и дидактической эффективностью в обучении учащихся поисковой, конструктивной, исследовательской деятельности, в формировании приемов логического мышления, а в целом – в обучении школьников решению математических задач. Геометрические задачи на построение обладают разнообразием идей и методов их решения, отличаются богатыми приложениями в практической деятельности, широкими внутрипредметными и межпредметными связями. Все это позволяет использовать их в процессе обучения геометрии систематически, реализуя такие дидактические задачи как более глубокое, осознанное усвоение учащимися теоретического материала (курс геометрии в отечественной школе является дедуктивным, а конструктивные задачи облегчают его усвоение), обобщение и систематизация знаний школьников, формирование мышления, пространственного воображения, графической культуры школьников.

3. Анализ эволюции постановки геометрических задач на построение в курсе геометрии отечественной школы 20-го столетия выявил их как одну из важнейших содержательных линий в нем. Постановка таких задач в отечественной школе имеет свои традиции и особенности, среди которых, например, систематический характер их представления школьникам, охват ими практически всех фигур, изучаемых в курсе планиметрии, рассмотрение различных методов их решения. На протяжении долгого времени одной из традиций отечественной школы было существенное внимание к такого рода задачам, которое в последние годы значительно снизилось. Более того, изучение опыта преподавания геометрических построений в некоторых зарубежных школах позволяет говорить о том, что геометрические построения и конструктивные методы находят достойное место в практике обучения геометрии в них не в ущерб формально – логическим методам.

4. В определении дидактической типологии конструктивных задач курса планиметрии существует два основных подхода, сложившихся в школьном обучении решению задач на построение. Первый из них в основе своей имеет метод решения конструктивной задачи, а второй – тип искомой в ней фигуры. Наиболее приемлемой для школьного обучения геометрии является типология конструктивных планиметрических задач по типу фигуры, которую требуется построить по условию задачи, поскольку именно такая

02-02716

типология в большей степени отражает содержание школьного курса планиметрии в целом и его отдельных разделов в их взаимосвязи с геометрическими построениями. При этом типология рассматриваемых задач по методам их решения также может быть использована локально, при рассмотрении отдельных тем или разделов курса геометрии.

5. Основным результатом исследования явилась разработанная методическая система обучения геометрии на основе широкого использования конструктивных геометрических задач. В основе этой системы лежат принципы: целостности, дедукции и индукции, анализа и синтеза, межпредметных и внутрипредметных связей, прагматизма, моделирования, эволюционного развития. Она также включает в себя целесообразную дидактическую типологию геометрических задач на построение (основные задачи на построение, задачи на построение треугольников, задачи на построение четырехугольников, задачи на построение окружности и ее элементов и др.) и методику обучения их решению. Особенностью этой методической системы является то, что она не ломает традиционной методики обучения геометрии, обеспечивая более качественную геометрическую подготовку школьников. Эта система применима к действующим отечественным учебникам геометрии для основной школы. Экспериментальное исследование подтвердило эффективность разработанной методической системы и выявило возможности ее использования в практике обучения геометрии в современной школе с целью обеспечения геометрической подготовки учащихся на более высоком уровне.

Все это дает основание считать, что поставленные задачи исследования решены.

Основные результаты диссертационного исследования отражены в следующих публикациях:

1. Психолого-дидактические функции конструктивных задач в школьном курсе геометрии // Сборник научных трудов ученых Орловской области. Вестник науки. Выпуск 5. В 2-х т. Т.2. – Орел: Орел ГТУ, 1999. – С.57-60.
2. Роль и место конструктивных задач в школьном курсе геометрии // Методическое обеспечение сельской школы: теория, практика, эксперимент. Материалы Всероссийской конф., 20-22 окт. – Орел: ОГУ, 1999. – С.133-137.
3. Возможности использования французского опыта комплексных задач в отечественной школе // Методическое обеспечение сельской школы: теория, практика, эксперимент. Материалы Всероссийской конф., 20-22 окт. – Орел: ОГУ, 1999. – С. 142-145.
4. Комплексные задачи в обучении геометрии // Сборник научных трудов ученых Орловской области. Вестник науки. Выпуск 6. В 2-х т. Т.2. – Орел: Орел ГТУ, 2000 – С. 49-51.

Баранова Л.Н.
Геометрические задачи на построение
в основной школе
Автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Орел, 2000. – 18 с.

Подписано в печать 16.11 2000. Заказ №.157. Тираж 100 экз.
отдел оперативной печати
Орловского областного комитета
Государственной статистики

R476 1/51