МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Ст. преподаватель Ставропольского
педагогического института Н. Д. БУРЕНИН

МЕТОДЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
(по методике математики)

Научный руководитель — профессор И. Я. ДЕПМАН.

ЛЕНИНГРАД
1957

Официальные оппоненты:

Профессор педагогики, доктор философских наук **Пипуныров П. Н.**

Кандидат педагогических наук **Поспелов А. И.**

Защита состоится в Ленинградском государственном педагогическом институте — г. Ленинград, М. Посадская, д. № 26.

« » . . . . 1957 г. в час.

Автореферат разослан « » . . . . 1957 г.

М14063 7/III-57 г. Тип. Окт. ж. д. зак. 1059 т. 100

Осуществление задач политехнического обучения в средней школе в соответствии с решениями XIX и XX съездов КПСС в значительной мере зависит от уровня политехнической подготовки самих преподавателей. Поэтому политехническая подготовка студентов в педагогическом институте должна быть приведена в полное соответствие с требованиями политехнической подготовки учащихся средней школы.

Среди разнообразных средств политехнической подготовки учащихся школы и студентов педагогического института существенное значение имеет и геометрическое моделирование. После XIX съезда КПСС интерес преподавателей математики средних школ к вопросам геометрического моделирования значительно возрос. Не случайно поэтому в настоящее время на всех педагогических чтениях заслушиваются с большим вниманием доклады по геометрическому моделированию и публикуются работы учителей, освещающие различные вопросы школьного моделирования. В этих работах авторы их делятся своим опытом и знакомят с изготовлением различных универсальных и так называемых динамических моделей, а также освещают те положительные результаты, которые дает преподавание геометрии с использованием моделей на уроках.

Введение математического практикума по геометрическому моделированию в педагогических институтах и возрастающий интерес преподавателей средних школ к вопросам геометрического моделирования обязывают обратить самое серьезное внимание на изучение и дальнейшую разработку проблем школьного геометрического моделирования. Накопленный опыт в практике геометрического моделирования требует не только его обобщения, но выдвигает новые задачи перед преподавателями средних школ и педагогических институтов. Мы должны не только обобщать опыт работы школ, но и обогащать школы решением целого ряда актуальных для нее задач. Одной из таких задач, не получившей достаточного освещения в методической литературе, является, по нашему мнению, **исследование возможностей применения методов конструктивной геометрии к точному построению моделей геометрических фигур в средней школе.** Опыт по изготовлению моделей геометрических фигур и использованию их на уроках дает во всех случаях положительные результаты и благотворно влияет на успеваемость учащихся и их дисциплину. Полезность организации работы в школе по геометрическому моделированию ни у кого в настоящее время не вызывает сомнений. Однако задачи на построение моделей геометрических фигур (как к теоремам, так и к задачам на вычисление) все еще решаются в большинстве школ чисто эмпирическим путем. К моделям геометрических фигур, изготовляемым учащимися, все еще не предъявляются определенные метрические требования. При построении моделей геометрических фигур перед учащимися ставится одна основная цель: модель должна быть наглядной и дать правильное представление о взаимном расположении элементов рассматриваемой геометрической фигуры. Все размеры строящейся модели геометрической фигуры часто берутся «на глаз» (или находятся чисто эмпирическим путем). Иногда же такая работа сводится к простому копированию уже имеющихся готовых моделей. Такая практика изготовления моделей, принося несомненно пользу, все-таки оторвана в значительной мере от задач математики и политехнического обучения. Изготовление моделей, преследующее только вышеуказанные цели (наглядность, правильность представления о фигуре) следует рассматривать как первоначальный этап в практике геометрического моделирования. Такое изготовление моделей имеет мало общего с производственным моделированием. При изготовлении моделей на производстве неизбежно выдвигается требование возможно точного изготовления моделей по заранее выполненным чертежам. С нашей точки зрения всякая модель, предлагаемая для построения учащимся, должна удовлетворять определенным метрическим требованиям и изготовляться точно по заранее выполненным чертежам. Эта модель строится по данным элементам той геометрической фигуры, которую она должна изображать. **Изготовлению такой модели неизбежно должна предшествовать постановка геометрической задачи, без решения которой невозможно построить требуемую модель.** Настоящая работа представляет собой попытку создать методическое пособие по точному геометрическому моделированию для преподавателей математики средних школ и студентов педагогических институтов. В ней ставятся следующие цели:

1. Ознакомить с техникой изготовления картонных, стеклянных, каркасных и каркасно-линейчатых моделей геометрических фигур и рассмотреть наиболее доступные для школы приемы изготовления этих моделей.

2. Ознакомить с общими методами построения разверток многогранников, изучаемых в средней школе. Ознакомить с построением оригиналов сечений многогранников заданными плоскостями.

3. Ознакомить с приложениями методов конструктивной геометрии к решению задач на построение разверток многогранников и оригиналов сечений заданными плоскостями, составленных по условиям задач школьного курса геометрии.

4. Дать сборник задач на построение разверток и моделей геометрических фигур для средней школы и педагогических институтов.

5. Ознакомить с организацией и результатами кружковой работы по геометрическому моделированию в некоторых средних школах и в Ставропольском педагогическом институте.

Работа делится на четыре главы, краткое содержание которых изложено ниже.

В главе первой **«Техника изготовления моделей геометрических фигур»** даны наиболее доступные для учащихся средней школы способы построения моделей геометрических фигур. Известно, что дать описание изготовления моделей к каждой задаче школьного курса геометрии не только не представляется возможным, но не имеет смысла. Поэтому в первой главе изложены общие и наиболее рациональные способы изготовления моделей. Зная эти способы, всегда можно изготовить требуемую модель по условиям той задачи, которая предлагается для решения. Изучив эту главу, можно приступить к решению задач на моделирование, одновременно производя построение самих моделей.

В параграфе первом изложена техника изготовления картонных моделей. Эти модели по технике изготовления их являются самыми простыми и доступными. Здесь же изложены приемы изготовления и таких моделей многогранников из картона, в каждой из которых можно показать и различные сечения их заданными плоскостями.

В параграфе втором изложена техника изготовления стеклянных моделей. Указаны наиболее доступные для учащихся способы изготовления их, а также способы окрашивания поверхности стекла и нанесения на него различных обозначений элементов фигуры.

В параграфе третьем дано описание техники изготовления каркасных моделей. Эти модели изготовляются из проволоки или металлических стержней. Изготовление их требует, как правило, от учащихся большой работы с паяльником. Например, изготовление каркасной модели куба требует по рекомендуемым в различных статьях способам припаивания восьми узлов (вершин), а в более сложных моделях, изготовляемых из проволоки, требуется значительно больший объем работы с паяльником. Вследствие незначительной поверхности соприкосновения припаиваемых частей проволоки модель часто получается недостаточно прочной. при незначительной деформации модель разрушается. В этом параграфе изложены способы построения каркасных моделей геометрических фигур, изготовляемых из проволоки, без разрезания ее. Изготовление таких моделей возможно только в тех случаях, когда удается выполнить проекционный чертеж фигуры, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя им два раза по одному и тому же ребру. Так, например, удалось установить, что таким способом возможно изготовление моделей следующих геометрических фигур: 1) любой четырехугольной призмы (усеченной пирамиды) с диагоналями ее оснований, 2) любой четырехугольной призмы (усеченной пирамиды), имеющей в каждой грани по одной диагонали, 3) любой n-угольной призмы или n-угольной усеченной пирамиды, имеющих по одной диагонали в каждой из боковых граней ее, 4) четырехугольной пирамиды с диагоналями основания ее, 5) любой треугольной пирамиды с высотой и проекцией одного из боковых ребер на плоскость основания ее, 6) любой n-угольной пирамиды (n — чётное число) с проекциями боковых ребер на плоскость основания ее, 7) любой n-угольной пирамиды (n — нечетное число) с высотой и проекциями боковых ребер на плоскость основания ее. В этих моделях припаивание отдельных кусков проволоки можно заменить связыванием плоских углов в их вершинах. Такие модели более прочны и долговечны. Заметим, что создание моделей пространственных фигур из одного куска проволоки является делом не простым. Нами разработаны способы построения плоских фигур, изготовляемых из целого куска проволоки, из которых затем просто изготовляются вышеперечисленные модели. Эти **«проволочные»** плоские фигуры изготовляются по заранее **начерченным** разверткам и условно названы проволочными **развертками.** Итак **построение каждой из вышеперечисленных моделей пространственных фигур приводится к построению модели плоской фигуры (проволочной развертки).** Заметим, что не всякую геометрическую фигуру можно изобразить на проекционном чертеже, выполняя этот чертеж по указанным требованиям. Однако попытка начертить изображение многогранника, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя им два раза по одному ребру, дает возможность практически установить наименьшее число точек, в которых надо произвести припаивание проволоки для изготовления модели. Заметим еще, что все те элементы геометрической фигуры, которые надо изобразить на модели ее, можно показать с помощью цветных ниток, прикрепив их в натянутом состоянии к каркасу модели.

В параграфе четвертом дано описание техники изготовления каркасных и каркасно-линейчатых моделей цилиндра, конуса, усеченного конуса и шара. Каркасная модель геометрической фигуры, поверхность которой показывается на модели с помощью цветных ниток, натягиваемых на каркас модели, называется здесь каркасно-линейчатой моделью. В этом параграфе изложены различные способы изготовления каркасных моделей и указаны способы натягивания сетки из нитей на эти каркасы. Каркасно-линейчатые модели очень красивы и наглядны. Любая фигура, помещенная внутри такой модели, ярко выделяется на фоне цветных ниток и, следовательно, хорошо просматривается при демонстрации модели. В этом же параграфе подробно изложены различные способы изготовления из проволоки модели шара данного диаметра. Задачи на комбинации различных геометрических фигур с шаром (шарами) являются для учащихся наиболее трудными. Особенно трудно выполнять чертежи к таким задачам. Поэтому **в изготовлении моделей геометрических фигур, связанных с шаром (шарами), ощущается в школе острая необходимость.** Модель шара, предлагаемая для самостоятельного изготовления из проволоки, очень наглядна: любая фигура, вписанная в шар, достаточно хорошо просматривается при демонстрации модели. Здесь же дано описание универсальной модели шара. Это есть модель шара, которая составлена из моделей двух полушарий, плотно прилегающих друг к другу и соединенных шарнирно в одной точке. Такая модель может быть использована при доказательстве некоторых теорем и при решении разнообразных задач.

В главе второй «Решение задач на построение разверток и моделей многогранников» дан сборник задач (с решениями) на построение разверток и моделей многогранников. **В параграфе первом (§ 5)** изложены те общие свойства разверток призм, пирамид и усеченных пирамид, которые дают возможность решать элементарными методами самые разнообразные задачи на построение этих разверток. Указанные методы вполне доступны учащимся девятых и десятых классов средней школы. Общие свойства разверток, дающие общие методы построения их, сформулированы в виде предложений. Так, например, для развертки пирамиды эти свойства сформулированы так: если построить развертку любой n-угольной пирамиды $SA_1A_2...A_n$ в виде звезды $A_1S_1A_2S_2...A_n S_n A_1$, то: 1) все перпендикуляры: S_1M_1, $S_2M_2,...,$ $S_n M_n$ к соответствующим сторонам основания A_1A_2, $A_2A_3,...,$ A_nA_1 пересекаются в одной точке O — проекции вершины S пирамиды на плоскость основания ее, 2) $S_1A_2 = S_2A_2$, $S_2A_3 = S_3A_3,...,$ $S_n A_1 = S_1A_1$; 3) $OM_1 < S_1M_1$, $OM_2 < S_2M_2,...,$ $OM_n < S_n M_n$.

Используя указанные свойства, легко построить полную развертку любой пирамиды, имея на плоскости развертки: 1) основание пирамиды и две любые боковые грани ее; 2) основание пирамиды, любую боковую грань ее и проекцию вершины S пирамиды на плоскость основания ее; 3) основание пирамиды, точку O и высоту h пирамиды; 4) основание пирамиды, точку O и высоту любой боковой грани ее.

Список подобных задач можно продолжить и далее. Свойства развертки боковой поверхности призмы сформулированы так. Пусть $A_1A_2...A_n B_1B_2...B_n$ есть любая n-угольная призма и точки O_1, $O_2,...,$ O_n — проекции вершин верхнего основания на плоскость нижнего основания ее. Если построить развертку этой призмы в виде звезды $A_1B_1B_2A_2B_2B_3...A_nB_nB_1A_1$, то 1) все пары перпендикуляров $B_i M_i$ и $B_i N_i$ к соответственным смежным сторонам основания A_iA_{i+1} и $A_{i-1}A_i$ пересекаются в точках O_i, служащих концами равных векторов $\overrightarrow{A_i O_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; здесь $B_i M_i \perp A_i A_{i+1}$, $B_i N_i \perp A_{i-1} A_i$; $B_i M_i \times B_i N_i = O_i$ и $\overrightarrow{A_1 O_1} = \overrightarrow{A_2 O_2} = \ldots = \overrightarrow{A_n O_n}$; 2) стороны параллелограммов развертки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_n B_n$ равны между собой; 3) $O_i M_i < M_i B_i$ и $O_i N_t < B_i N_i$

Используя эти свойства, можно построить полную развертку призмы, имея на плоскости развертки: 1) основание призмы и две любые смежные боковые грани ее; 2) основание призмы, любую боковую грань ее и проекцию любой вершины верхнего основания на плоскость нижнего основания ее; 3) основание призмы, любую боковую грань и высоту призмы и целый ряд подобных задач[1]. Аналогично сформулированы и общие свойства разверток усеченных пирамид. Следует подчеркнуть, что указанные свойства справедливы и для невыпуклых призм и пирамид. Общие свойства разверток призм и пирамид дают возможность, кроме того, решать при наличии развертки самые разнообразные задачи, не производя построение модели. Так, например, при наличии развертки любой призмы (или пирамиды, или усеченной пирамиды) легко можно найти: 1) проекции вершины верхнего основания призмы на плоскость нижнего основания ее; 2) высоту призмы, оригиналы диагональных сечений и диагонали призмы; 3) углы наклонения боковых граней (ребер) призмы к плоскости основания ее; 4) площадь полной поверхности и объем призм и некоторые другие задачи. Эти задачи решаются чисто геометрическими методами, но требуют для получения численного результата измерения отрезков и углов. Эффективность решения некоторых геометрических задач на вычисление с помощью разверток можно, например, подтвердить следующей задачей: «основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a, b и c, а боковые ребра ее наклонены к плоскости основания под углом α. Вычислить углы наклонения боковых граней пирамиды к плоскости основания ее». Эта задача очень просто и быстро решается с помощью методов конструктивной геометрии. По условиям этой задачи с помощью циркуля и линейки можно без больших затруд-

[1] В перечисленных задачах боковые грани даются в их истинном положении относительно основания.

ний построить развертку пирамиды. Пользуясь изложенными свойствами развертки пирамиды, можно затем построить и измерить требуемые углы, не производя никаких вычислений. Приведенный пример эффективного применения развертки к решению стереометрической задачи на вычисление не является исключением. Решение этой задачи в общем виде не является сложным, но для получения численных результатов она требует длинных вычислений. **Исследование приложений методов конструктивной геометрии к решению стереометрических задач на вычисление, безусловно, представляет для школы значительный интерес.**

В параграфе втором этой главы (§ 6) теми же методами решаются задачи на построение разверток и моделей многогранников по условиям задач школьного курса геометрии (Н. Рыбкин «Сборник задач по тригонометрии»). Каждая из этих задач решается как конструктивная геометрическая задача. При решении задач этого параграфа используются: метод геометрических мест, метод подобия, метод параллельного перенесения и метод симметрии. Здесь, например, решаются такие задачи: 1. Построить развертку и модель призмы, основание которой есть правильный шестиугольник со стороною a, высота призмы равна h, а одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания ее; 2. Основанием пирамиды SABC служит треугольник ABC с углами α и β. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ, а отрезок, соединяющий проекцию O вершины пирамиды на плоскость основания ее, с серединой F высоты SD треугольника SBC, равен a. Построить развертку и каркасную модель пирамиды с сечением ее плоскостью, проходящей через OF и параллельной ребру BC; 3. Построить развертку и каркасную модель усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, высота которой равна h, нижнее основание есть ромб с диагоналями $AC=2a$ и $BD=2b$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Построить, кроме того, оригинал сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD_1 и параллельной диагонали основания AC.

В этом же параграфе предлагаются и задачи на вычисление, связанные с теми геометрическими фигурами, модели которых требуется построить. Так, например, в последней из указанных задач предлагается по условиям ее вычислить площадь сечения пирамиды заданной плоскостью. Следует заметить, что и в этом случае задача проще решается с помощью методов конструктивной геометрии.

В настоящем параграфе рассматривается решение и тех задач на построение разверток, оригиналов сечений и моделей многогранников, которые составлены по условиям задач на вычисление из «Сборника задач по тригонометрии» Н. Рыбкина.

Ознакомившись с решениями этих задач, учитель получит достаточно ясное представление о построении моделей геометрических фигур к задачам школьного типа. Все задачи этого параграфа решаются как конструктивные геометрические задачи **чисто геометрическим путем.** Здесь же изложено построение оригиналов простейших сечений многогранников заданными плоскостями.

В параграфе третьем (§ 7) настоящей главы предлагаются задачи на построение разверток и моделей многогранников, решаемые с помощью алгебраического метода. Здесь же изложены построения оригиналов тех сечений многогранников плоскостями, которые наиболее часто встречаются в школьных задачниках по геометрии. Почти во всех задачах этого параграфа те элементы геометрической фигуры, которые вводятся для построения модели ее, находятся алгебраическим путем и требуют применения тригонометрии. Все задачи этого типа решаются автором по следующей схеме: 1) проводится анализ задачи, в результате которого находятся элементы геометрической фигуры, необходимые для построения модели ее; 2) проводится исследование, имеющее целью выяснить условия существования той геометрической фигуры, модель которой требуется построить; 3) производится такой выбор данных в условии задачи параметров, который обеспечивает существование той геометрической фигуры, модель которой требуется построить. Этот выбор параметров производится по результатам исследования; 4) составляется краткий план построения развертки и модели; 5) производится построение отрезков и углов (по найденным формулам), необходимых для построения развертки. Выполняется построение самой развертки. Все эти построения выполняются на чертежной доске с помощью чертежных инструментов; 6) если на модели требуется показать сечение многогранника заданной плоскостью, то построение оригинала сечения его выполняется с помощью проекционного чертежа и развертки; 7) производится построение модели геометрической фигуры по составленным чертежам, т. е. по ее развертке и оригиналу сечения заданной плоскостью.

При решении задач алгебраическим методом автор отступает от обычной схемы. Это отступление заключается в том, что **исследование проводится до построения искомой фигуры, а не после него.** Дело в том, что при решении задач на построение, нельзя брать данные отрезки и углы произвольно, не проведя исследования. Может оказаться (и часто бывает), что при данных параметрах геометрическая фигура не существует и, следовательно, не может существовать и модель ее. Необходимо подчеркнуть, что для выяснения условий существования геометрической фигуры не всегда достаточно исследования одной формулы, выражающей неизвестный отрезок или угол, к построению которого сводится задача. Пусть, например, требуется построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов s и высоте h, проведенной из вершины прямого угла. Задачу можно привести к построению гипотенузы этого треугольника. Эта гипотенуза выражается через данные следующей формулой:

$$z = \sqrt{s^2 + h^2} - h.$$

Как видно из этой формулы, отрезок z существует при любых s и h ($s > O$, $h > O$), но сам треугольник, как это показывает исследование, существует при условии $s \geqslant 2\sqrt{2} \cdot h$ и это необходимо выяснить до построения. Таких примеров можно привести сколько угодно. В 1954 году был опубликован сборник задач на построение плоских фигур, решаемых алгебраическим методом [1]. При решении каждой из этих задач исследование проводилось до построения искомой фигуры. Все учителя, пользующиеся этим задачником, подтверждают целесообразность и доступность для учащихся школы такой схемы решения. При решении подобных задач со студентами педагогического института в течение последних шести лет автор убедился в полезности указанной схемы. Практика решения задач на построение разверток алгебраическим методом также подтверждает целесообразность этой схемы. При составлении задач настоящего параграфа автор стремился предложить именно те задачи на построение разверток и моделей геометрических фигур, в каждой из которых необходимо выяснить условия существования фигуры.

---

[1] Н. Д. Буренин «Алгебраический метод решения задач на построение в средней школе».

В качестве примера приведем задачи: 1. Построить развертку и модель такой четырехугольной пирамиды, площадь боковой поверхности которой равна k^2, а все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания ее. Основание этой пирамиды есть равнобочная трапеция, полусумма оснований которой равна s, а радиус окружности, вписанной в нее, равен r. Исследование показывает, что эта пирамида существует при условии $2r < s < \frac{k^2}{2r}$ 2. Построить развертку и модель правильной четырехугольной усеченной пирамиды, площадь полной поверхности которой равна $4k^2$, а радиус окружности, вписанной в ее боковую грань, равен R. Исследование показывает, что указанная пирамида существует при условии: $R\sqrt{6} < k < R\sqrt{2(3+2\sqrt{2})}$. Задачи, в которых требуется построить оригиналы сечений многогранников заданными плоскостями, решаются здесь по следующему плану: 1) построение сечения производится вначале на проекционном чертеже, выполненном в произвольной параллельной проекции. При решении этой задачи непременно надо выяснить форму полученного сечения и доказать, что сечение является искомым; 2) по условиям задачи выполняется построение развертки многогранника и требуемого оригинала сечения его. Это построение выполняется на плоскости развертки. При построении оригинала сечения многогранника все время ориентируются по проекционному чертежу. Обычно построение оригинала сечения начинается с последовательного построения на развертке линий пересечения (следов) секущей плоскости с гранями многогранника, после чего выполняется чертеж оригинала самого сечения. Опыт показывает, что построение развертки пирамиды (призмы) по условиям задач школьного курса геометрии целесообразнее всего производить в виде звезды. Такая форма развертки является наиболее удачной и для построения оригинала сечения многогранника заданной плоскостью. При построении развертки пирамиды (призмы) в виде звезды можно использовать те общие свойства разверток, которые изложены в параграфе первом этой главы. Существуют высказывания о том, что целесообразно развертку боковой поверхности пирамиды сразу же строить в виде веера, а развертку боковой поверхности призмы в виде плоской фигуры, состоящей из последовательно соединенных общими ребрами параллелограммов. При этом, главным образом, имеют в виду цель наиболее экономного расходования материала, идущего на изготовление модели. Имея на чертеже развертку пирамиды (призмы) в виде звезды, всегда и без больших затруднений можно построить эту развертку в любом другом виде, а в том числе и в виде веера. То же самое можно сказать и о развертке призмы. Однако, как это следует из свойств разверток, изложенных в первом параграфе, наиболее целесообразно строить развертки по условиям задач школьного курса геометрии рекомендуемыми в работе методами и именно в виде звезды. Отметим, что если пирамида имеет плоскость симметрии, в результате отражения от которой вершина и основание ее переходят соответственно сами в себя, то легко доказать, что развертка этой пирамиды, построенная в виде звезды, симметрична относительно некоторой прямой, а именно линии пересечения плоскости симметрии с плоскостью основания пирамиды. Если призма имеет такую плоскость симметрии, в результате отражения от которой каждое из оснований призмы переходит само в себя, то развертка боковой поверхности этой призмы, построенная указанным методом, симметрична относительно прямой. Если пирамида (призма) имеет ось симметрии, проходящую через вершину ее (через основания ее), то развертка боковой поверхности этой пирамиды (призмы) симметрична относительно точки пересечения оси симметрии с плоскостью основания ее. Эти свойства широко используются при построении разверток. Объясним на примере одно свойство развертки пирамиды (призмы), построенной в виде звезды, которое условно назовем замкнутостью построения развертки. Пусть развертка пирамиды $SA_1A_2... A_n$ задана ее основанием $A_1A_2... A_n$, гранью $S_1A_1A_2$ и точкой O — проекцией вершины S пирамиды на плоскость основания ее. По этим данным можно последовательно построить грани $S_2A_2A_3,..., S_n A_n A_1$, на чем и заканчивается построение развертки пирамиды. Однако для контроля правильности самого построения развертки построим тем же методом боковую грань, следующую за гранью $S_n A_n A_1$. Если эта грань совпадает с данной гранью $S_1A_1A_2$, то построение выполнено правильно. То же самое можно сказать и о построении разверток призм и усеченных пирамид. Итак, построив данную грань, мы как бы замыкаем круг построений боковых граней. Поэтому именно это свойство мы и назвали замкнутостью построения. Это свойство можно проследить на многих чертежах разверток, помещенных в настоящей работе. Общие методы построения разверток призм и пирамид изложены почти во всех курсах черчения и начертательной геометрии, а поэтому может казаться, что построение разверток рассматриваемыми методами не имеет смысла. Такое заключение является неверным. Дело в том, что в курсах черчения пирамида (призма) обычно задается ее проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости. Чаще всего пирамида (призма) задается ее проекциями на горизонтальную плоскость H и вертикальную плоскость V, причем плоскость основания пирамиды (призмы) обычно берется совпадающей с плоскостью H. Однако в задачниках по элементарной геометрии, пространственные фигуры не задаются их проекциями на плоскости H и V (за исключением очень малого числа задач). Построение проекций пирамиды (призмы) или какого-либо другого многогранника, заданных определенными параметрами на две взаимно перпендикулярные плоскости, представляют собой задачу часто более сложную, чем задача на построение развертки многогранника по данным его проекциям на плоскости H и V. Каждая из задач на построение проекций пирамиды, усеченной пирамиды и призмы на плоскости H и V по условиям задач школьного курса геометрии требует своеобразного анализа и является безусловно полезной задачей. Она является полезной потому, что изображение предмета с помощью ортогональных проекций на плоскости H и V широко применяется в начертательной геометрии и в техническом черчении. Легко доказать, что при наличии каждой из разверток призмы, пирамиды и усеченной пирамиды задача на построение проекций этих многогранников на плоскости H и V всегда разрешима, причем построение этих проекций выполняется очень просто и единым методом в том случае, когда каждая из разверток дана в виде звезды. Из этого следует, что, решая задачу на построение разверток призм, пирамид и усеченных пирамид и производя построение этих разверток рекомендуемыми методами в виде звезды, мы одновременно решаем задачи на построение ортогональных проекций этих многогранников на плоскости H и V. Таким образом устанавливается связь изложенных методов с методами начертательной геометрии. Некоторые задачи настоящего параграфа приводятся к построению отрезков и углов, величины которых выражаются через данные параметры громоздкими формулами. Построение отрезков и углов по таким формуламлам не всегда доступно учащимся средней школы, так как для приобретения опыта в построении их требуется много времени. Поэтому учащимся средней школы после решения задачи в общем виде рекомендуется задавать определенные числовые значения параметров, заключенных в условии задачи, и по ним вычислять искомые элементы. При таком способе решения значительно сокращается число вспомогательных построений, да и сами построения производятся проще. Таким способом каждую из задач настоящего параграфа можно одновременно решать и как задачу на вычисление и как конструктивную геометрическую задачу. На уроках черчения в школе, учащиеся не производят никаких вычислений, так как сами упражнения в курсе черчения составлены так, что они не требуют для выполнения чертежей никаких вычислений. Решение задач на построение разверток многогранников по числовым данным даст учащимся практику в области черчения, требующую вычислений. В этом же параграфе предлагается много задач, в которых целесообразно пользоваться теоремой о площади проекции плоской фигуры на плоскость. Указанная теорема используется в школе только для вычисления площадей боковой и полной поверхности пирамиды, боковые грани которой одинаково наклонены к плоскости основания ее. В настоящем пособии предлагается большое число задач, в которых указанная теорема применяется для вычисления площадей сечений многогранников и для построения разверток их. Здесь же в отдельных случаях приводятся различные способы решения одних и тех же задач. Ознакомление учащихся с различными способами решения одной и той же задачи весьма полезно. Особенно полезно подчеркивать при этом практическую ценность того или иного способа решения ее. Навязывание учащимся стандартного способа решения одной и той же задачи, без указания практической ценности его, не педагогично. Так, например, при решении задачи «Разделить данную трапецию ABCD на две равновеликие части прямой MN, параллельной основаниям ее», рекомендуют за неизвестный отрезок брать расстояние от точки E пересечения продолжений боковых сторон до конца искомого отрезка MN, а за известные отрезки — EC и ED. При решении задачи указанным способом учитель обязан предупредить учащихся о том, что данная трапеция должна быть взята такой, чтобы ее боковые стороны пересекались на чертеже. Но тогда неизбежно возникает вопрос о том, как решить ту же задачу в том случае, когда боковые стороны трапеции пересекаются при продолжении в точке E, не помещающейся на чертеже. Если, кроме того, решать такую же задачу на местности, то непрактичность указанного способа решения ее становится ясной: точка E может оказаться или в недоступной области или на значительном расстоянии от точек C и D. В этом случае целесообразно взять за неизвестный отрезок — MN. Его длина $MN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, где a и b — основания трапеции. Измерить a и b на местности, вычислить длину отрезка MN по указанной формуле и построить его на местности очень просто. Практическая ценность второго способа очевидна. Решение подобных вопросов с учащимися повышает их интерес к решению задач на построение и способствует их лучшей политехнической подготовке. Рассмотренный пример не является единичным. Такие же примеры возникают и в практике построения разверток.

В последнем параграфе (§ 8) этой главы предлагаются задачи на комбинации многогранников по условиям задач школьного курса гемометрии. Эти задачи также приводятся к построению разверток тех многогранников, которые составляют рассматриваемую в условии задачи геометрическую фигуру. Эти задачи, как и предшествующие, решаются методами конструктивной геометрии. Для нахождения тех элементов многогранников, по которым вычерчиваются их развертки, часто приходится строить те оригиналы сечений их, в которые входят неизвестные элементы. Оригиналы каких именно сечений надо построить для того, чтобы найти эти элементы, обычно в условии задачи не указываются. С целью облегчения учащимся школы решения некоторых из этих задач, нами в условиях их предлагается построить те оригиналы сечений, которые нужны для нахождения искомых элементов. Для студентов педагогических институтов эти требования о построении оригиналов сечений можно исключить из условий этих задач. В каждой из них студенты сами должны поставить задачу о построении тех оригиналов сечений, которые им потребуются для построения разверток. К этим задачам рекомендуется изготавливать каркасно-линейчатые модели. Если по условиям задачи один многогранник вписан в другой, то модель вписанного многогранника можно сделать из картона, а модель описанного должна быть каркасно-линейчатой или стеклянной. На такой модели ясно видно взаимное расположение многогранников.

В главе третьей «Расчет и построение моделей круглых тел» в первом параграфе (§ 9) содержатся теоремы о шаре, вписанном в многогранник, и шаре, описанном около многогранника. Здесь же изложены решения задач на построение моделей цилиндра, конуса усеченного конуса и шара. В тех случаях, когда требуется изготовить модель цилиндра, конуса или усеченного конуса из плотной бумаги, задача на изготовление модели приводится к построению развертки поверхности каждого из них. Первые задачи этого параграфа и требуют построения указанных разверток. Если по условиям задачи внутри модели цилиндра или конуса, или усеченного конуса надо показать элементы, расположенные внутри его, то модель должна быть «прозрачной». Эти модели для большей наглядности рекомендуется делать каркасными или каркасно-линейчатыми. Техника изготовления этих моделей подробно описана в первой главе. По условиям составленных задач все фигуры, модели которых требуется построить, должны удовлетворять определенным метрическим требованиям. Все эти задачи, как и предшествующие, являются определенными. Для построения каркасов моделей цилиндра конуса и усеченного конуса необходимо иметь оригинал осевого сечения каждого из них. К построению осевого сечения и приводятся эти задачи. Иначе говоря, они приводятся к построению: или прямоугольника, или равнобедренного треугольника, или равнобочной трапеции. Эти задачи, в зависимости от условий их, решаются различными методами: методом геометрических мест, методом параллельного пересечения, методом симметрии и алгебраическим методом. При решении этих задач также необходимо проводить исследование и выяснять условия существования тех фигур, модели которых требуется построить. В этом же параграфе содержатся задачи на комбинации круглых тел, на комбинации круглых тел с многогранниками и на построение моделей их. Умение строить оригиналы сечений многогранников, круглых тел и фигур, представляющих различные комбинации их, играет огромную роль в деле политехнического обучения учащихся. Изображение оригиналов сечений различных деталей машин, приборов, механизмов, двигателей и т. д. имеет большое значение в формировании технических знаний учащихся, в развитии их пространственных представлений, в умении читать технические чертежи, а, следовательно, в изучении ими технической литературы по интересующим их вопросам. Отсутствие в школьных задачниках по геометрии (как на вычисление, так и на построение) упражнений на построение оригиналов сечений многогранников и круглых тел является существенным недостатком их. Такие задачи необходимы для целей геометрического моделирования и полезны для подготовки учащихся к изучению технического черчения.

В параграфе втором (§ 10) этой главы рассматриваются задачи на вычисление площадей поверхностей и объемов тел вращения и на построение их моделей. Построение каждой из моделей тел вращения приводится здесь к построению модели плоской фигуры, вращающейся около оси, и каркасно-линейчатой модели тела вращения. Задачи на построение моделей тел вращения, как и предшествующие, решаются с помощью методов конструктивной геометрии.

В главе четвертой «Организация и постановка работы по геометрическому моделированию в школах Ставропольского края и в Ставропольском педагогическом институте» освещаются некоторые результаты работы учащихся школ и студентов по геометрическому моделированию.

Ознакомление учителей и учащихся с методами решения задач на построение моделей геометрических фигур, изложенных в пособии, и с практическими приемами изготовления этих моделей проводилось автором при помощи: 1) работы кружка по геометрическому моделированию в Ставропольском педагогическом институте, 2) организации семинарских занятий со студентами заочного отделения, 3) выполнения студентами курсовых работ по геометрическому моделированию, 4) организации семинарских занятий с преподавателями математики средних школ Ставропольского края, 5) организации и проведения кружковых занятий с учащимися девятых и десятых классов некоторых средних школ Ставропольского края, 6) проведения кружковых занятий по моделированию в период проведения педагогической практики студентов.

Работа с учащимися по геометрическому моделированию с помощью пособия, составленного автором, проводилась в восьми школах Ставропольского края и в двух школах Краснодарского края. Работа по геометрическому моделированию в этих средних школах проводилась примерно по тому же плану, по которому она проводилась и в Ставропольском педагогическом институте, однако учителя заимствовали из этого пособия в основном те задачи на построение моделей, которые им были нужны для решения соответствующих задач на вычисление. Большая часть преподавателей при решении с учащимися задач алгебраическим методом сочла более полезным производить построение разверток по числовым данным. Эти задачи решаются примерно по схеме:

1. В результате анализа устанавливалось, какие элементы геометрической фигуры следовало найти для построения развертки и модели.

2. Эти элементы находились по условиям задачи в общем виде.

3. Проводилось исследование. По найденным в результате исследования условиям существования фигуры задавались числа, выражающие значения данных параметров.

4. По найденным формулам производилось вычисление элементов, необходимых для построения развертки.

5. По найденным числовым данным производилось построение развертки, требуемого оригинала сечения, а затем и модели геометрической фигур.

Построение самих разверток по числовым данным выполнялось теми же методами, которые изложены в настоящей работе. Если задача на построение развертки не требовала применения алгебраического метода, то она решалась чисто геометрическим путем. В этой же главе дано подробное описание работы кружка по геометрическому моделированию в Ставропольском педагогическом институте, проводившейся под руководством автора с 1953 года: изложено содержание двадцати пяти занятий кружка, дано описание содержания каждого занятия, задач, решавшихся на каждом занятии, и заданий для самостоятельной работы студентов по решению задач и изготовлению моделей. Здесь же кратко изложено содержание требований, предъявляемых к курсовым работам по геометрическому моделированию, которые выполнялись студентами. В дальнейшем дается краткое описание работы студентов с учащимися девятых и десятых классов по геометрическому моделированию во время проведения педагогической практики, а также результатов этой работы, краткое описание работы по геометрическому моделированию, проводившейся автором со студентами заочного отделения, изложение содержания работы по геометрическому моделированию в некоторых школах Ставропольского и Краснодарского краев, проводившихся по изложенному автором пособию и при его участии. В частности указаны, какие задачи по моделированию были решены учащимися школы и какие модели были ими изготовлены за время работы кружка. Тут же дается и краткое описание результатов этой работы, подтверждающей ее полезность как в средней школе, так и в педагогическом институте. На основании наблюдений и изучения опыта работы кружков автор приходит к следующим выводам:

1. Учащиеся научились применять известные им методы конструктивной геометрии к построению разверток и моделей геометрических фигур;

2. Научились решать задачи на построение сечений на проекционном чертеже и на построение оригиналов этих сечений.

3. На конкретных задачах получили понятие о выяснении условий существования пространственных геометрических фигур, понятие о выборе данных в условии задачи параметров по результатам исследования.

4. Получили практические навыки в технике изготовления моделей по чертежам. Кроме того, **в результате продолжительной работы кружков, некоторые школы Ставропольского края и Ставропольский педагогический институт имеют в настоящее время богатые коллекции моделей геометрических фигур, изготовленных учащимися.** Эти модели с успехом используются преподавателями математики на уроках, что дает возможность сделать эти уроки увлекательными, а самую геометрию понятной и, следовательно, доступной всем учащимся. Здесь же отмечены и другие положительные результаты, которые были достигнуты в итоге работы кружка по геометрическому моделированию в Ставропольском педагогическом институте.

В частности отмечено, что в институте организовано изготовление моделей не только по элементарной геометрии, но и по другим математическим дисциплинам (аналитическая геометрия, проективная геометрия и т. д.). В прилагаемом в работе альбоме показаны фотоснимки моделей, изготовленных силами учащихся средних школ и студентов Ставропольского педагогического института.

В этой же главе дается краткий обзор некоторых работ по геометрическому моделированию в средней школе, опубликованных в печати, и рассмотрены наиболее интересные работы учителей и научных работников институтов, с оценкой их достоинств и с указанием вопросов, которые недостаточно освещены в этих работах. В частности отмечается, что в известных автору опубликованных работах по школьному геометрическому моделированию: 1) отсутствует описание общих методов построения разверток призм, пирамид, усеченных пирамид, изложенных в параграфе первом второй главы; 2) отсутствует и описание того, как следует производить выбор данных в условии задачи параметров, обеспечивающий существование той геометрической фигуры, модель которой требуется построить; 3) нет описания техники изготовления модели шара из проволоки.

В этой же главе изложены практические предложения автора, осуществление которых вполне реально и будет способствовать улучшению подготовки учащихся в области конструктивной геометрии и геометрического моделирования как в средней школе, так и в педагогическом институте. Основные из них следующие:

1. При изучении темы «Алгебраический метод решения задач на построение» как в средней школе, так и в педагогическом институте, следует проводить исследование каждой из задач до построения искомой геометрической фигуры. Результаты исследования там, где это возможно, нужно выражать через данные в условии задачи параметры и научить учащихся школы и студентов педагогических институтов производить по результатам исследования такой выбор параметров, который обеспечивает существование искомой фигуры.

2. При проведении со студентами практических занятий по решению задач на построение нужно ознакомить всех их с элементарными методами построения разверток многогранников и круглых тел, изучаемых в средней школе. Задачи на построение разверток следует решать методами конструктивной геометрии.

3. Тему «Решение задач на построение на проекционном чертеже» надо связать с построением разверток многогранников и оригиналов сечений их заданными плоскостями.

4. При изучении в курсе элементарной геометрии тем «Отражение от точки», «Отражение от прямой», «Отражение от плоскости» нужно указать на связь симметрии призм, пирамид и усеченных пирамид относительно определенной плоскости (прямой) с симметрией разверток боковых поверхностей их относительно прямой (точки).

5. Необходимо ознакомить всех учащихся средней школы и студентов педагогических институтов на практических занятиях с техникой изготовления картонных, стеклянных, каркасных и каркасно-линейчатых моделей геометрических фигур по заранее выполненным ими чертежам, в частности,

ознакомить их с изготовлением из проволоки модели шара данного диаметра и моделей на комбинации многогранников и круглых тел с шаром по условиям задач школьного курса геометрии.

6. При изучении курса черчения надо уделить дóлжное внимание решению задач на построение разверток и моделей геометрических фигур и ознакомить студентов с решениями задач на построение ортогональных проекций многогранников на плоскости H и V по условиям задач школьного курса геометрии.

Автором был учтен опыт тех учителей математики средних школ, которые сумели поставить работу по моделированию в школах на достаточно высокий уровень. Этот опыт обобщался автором путем непосредственного изучения работы школ по геометрическому моделированию, непосредственным участием в работе некоторых из этих школ и путем изучения опубликованных в печати литературных источников по данному вопросу.

Настоящая диссертация представляет собой обобщение следующих работ автора, опубликованных в печати Ставропольским краевым отделом народного образования и институтом усовершенствования учителей:

1. Решение задач на построение методом геометрических мест. Ставропольский крайиздат, 1951.

2. Алгебраический метод решения задач на построение в средней школе. Ставропольский крайиздат, 1954.

3. О точном построении моделей геометрических фигур в средней школе. Ставрополь Н/К, 1956.